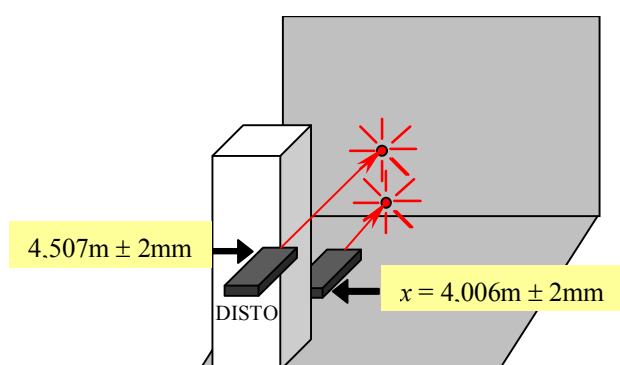


Analiza dokładności pomiarów

Charakterystyką dokładności instrumentów pomiarowych jest błąd średni pomiaru. Wykonywane pomiary bezpośrednie w terenie pośredniczą zwykle w wyznaczaniu pewnych wielkości nie poddających się wprost pomiarowi, na przykład pole powierzchni działki jest wyznaczane na podstawie pomiaru długości boków działki. Błędy średnie pomiarów pośrednich, np. pola powierzchni działki, są obliczane na podstawie prawa przenoszenia błędów przypadkowych. Celem planowania dokładności pomiarów jest dobór instrumentów pomiarowych dla zapewnienia wymaganej dokładności wyznaczanych wielkości

1. Błąd średni pomiaru

Pomiar jest czynnością mającą na celu wyznaczenie wartości danej wielkości fizycznej. Pomiar może być bezpośredni lub pośredni. W pomiarze bezpośrednim dokonuje się porównania wartości mierzonej wielkości fizycznej z wartością wzorcową, na przykład jednego metra. W pomiarze pośrednim mierzy się inne wielkości fizyczne związane znaną zależnością funkcyjną z wielkością mierzoną. Przykładami pomiarów bezpośrednich są pomiary długości budynku, jak również odległości między ścianami, posadzką a sufitem za pomocą podręcznych dalmierzy laserowych



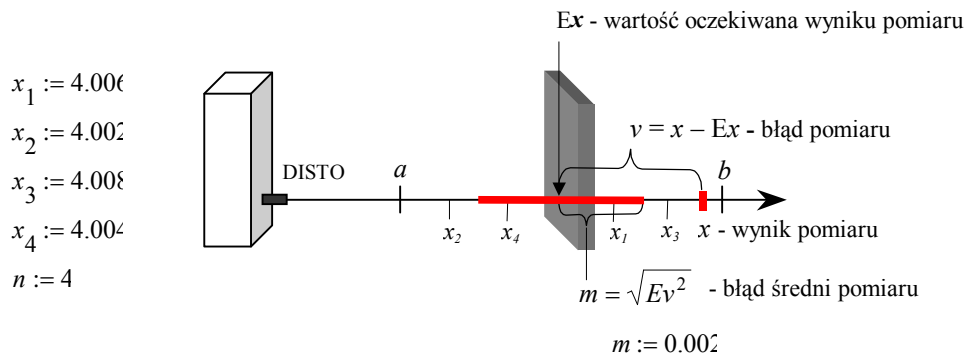
Rys. 1.1



Leica DISTO

Podczas pomiaru za pomocą dalmierzy laserowych czerwony promień światła laserowego ułatwia lokalizację celu z dokładnością plamki laserowej, której średnica dla odległości 10, 50 i 100 m wynosi odpowiednio 6; 30 i 60 mm. Czas trwania pomiaru wynosi 3 sekundy. Dalmierz jest wyposażony w tarczę celowniczą ustawianą na narożnikach budynków, w przypadku pomiaru długości ścian zewnętrznych. Tarcza ta poprawia również warunki pomiaru do nieregularnych powierzchni lub powierzchni o małym współczynniku odbicia, a także w przypadku pomiaru w pomieszczeniach zadymionych, zapyłonych lub zamglonych. W pamięci wewnętrznej dalmierza można rejestrować trzy różne wymiary, np. długość, szerokość i wysokość pomieszczenia, co umożliwia obliczenie i wykazanie na ekranie dalmierza powierzchni i kubatury.

Z doświadczenia wiadomo, że **wynik pomiaru** pewnej wielkości np. odległości x za pomocą dalmierza DISTO (rys..1.1, 1.2) przyjmuje wartość z przedziału $a < x < b$ którego wielkość zależy od dokładności użytego przyrządu pomiarowego m .



Rys. 1.2

Odchylenie wyniku pomiaru x od wartości oczekiwanej $v = x - Ex$ nazywane **błędem pomiaru**, ma charakter przypadkowy, zmienia się w czasie wykonywania pomiarów zarówno co do wielkości jak i znaku.

Przy założeniu średniej arytmetycznej jako wartości oczekiwanej wyniku pomiaru:

$$x_{sr} := \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad x_{sr} = 4.005$$

błędy poszczególnych pomiarów $v := x - x_{sr}$ wynoszą:

$$\begin{aligned} v_1 &= 0.001 & v_3 &= 0.003 \\ v_2 &= -0.003 & v_4 &= -0.001 \end{aligned}$$

Odchylenie standardowe, nazywane **błędem średnim pomiaru**

$$m = \sqrt{Ev^2}$$

jest obliczane na podstawie wartości oczekiwanej sumy kwadratów (niezależnych $Ev_i v_j = 0$ i jednakowej dokładności $Ev_i^2 = m_i^2 = m^2$, $i, j = 1, 2, \dots, n$) błędów pomiarów $E \sum (x_i - x_{sr})^2 = \sum E (x_i - x_{sr} + Ex - Ex)^2 = \sum E [v_i - (v_1 + \dots + v_n)/n]^2 = m^2(n-1)$, skąd:

$$m_0 := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (v_i)^2}{n-1}} \quad m_0 = 0.0026$$

Jeżeli $m_0 = 0.0026 \approx m = 0.002$ to wartość średnia i jej błąd: $m_{sr}^2 = E(x_{sr} - Ex_{sr})^2 = m^2/n$,

$$m_{sr} := \frac{m}{\sqrt{n}} \quad m_{sr} = 0.001$$

są poprawne, to znaczy wyniki pomiarów są zgodne.

Pomiary, których odchyłki v przekraczają co do bezwzględnej wartości 2- lub 3-krotnie ich błąd średni: $m_v^2 = E(x - x_{sr})^2$:

$$m_v := \sqrt{m^2 - m_{sr}^2} \quad m_v = \blacksquare$$

są uznawane za odstające: W podanym przykładzie brak pomiarów odstających, wszystkie pomiary spełniają kryterium $|v| \leq 2 \cdot m_v = 0.0035$.

są uznawane za odstające: W podanym przykładzie brak pomiarów odstających, wszystkie pomiary spełniają kryterium $|v| \leq 2 \cdot m_v = 0.0035$.

W przypadku wystąpienia pomiarów odstających parametry rozrzutu x_{sr} , m_0 są obliczane iteracyjnie, odrzucając na każdym kroku pomiary odstające. W każdym kroku iteracji może się zmieniać zestaw usuwanych pomiarów odstających, pomiar raz usunięty może wrócić do zbioru, na podstawie którego oblicza się parametry rozrzutu. Postępowanie iteracyjne kontynuuje się do momentu, gdy parametry rozrzutu otrzymywane w kolejnych iteracjach przestaną się różnić znacząco, co oznacza, że zbiory w kolejnych iteracjach zawierają te same, lub prawie te same pomiary.

2. Rozkład normalny

W przypadku dużej liczby pomiarów np. $n := 20$ wyników pomiarów odległości za pomocą dalmierza DISTO, o błędzie średnim pomiaru $m := 0.002$, pogrupowanych w 5 -ciu przedziałach o szerokości $\Delta x := 0.002$ m i środkach X :

			$x_8 := 4.005$	
			$x_9 := 4.006$	
	$x_3 := 4.003$		$x_{10} := 4.006$	
	$x_4 := 4.004$		$x_{11} := 4.005$	$x_{15} := 4.007$
	$x_5 := 4.004$		$x_{12} := 4.006$	$x_{16} := 4.008$
$x_1 := 4.002$	$x_6 := 4.003$		$x_{13} := 4.005$	$x_{17} := 4.008$
$x_2 := 4.001$	$x_7 := 4.004$		$x_{14} := 4.005$	$x_{18} := 4.007$
				$x_{19} := 4.009$
				$x_{20} := 4.010$
$X_1 := 4.0015$	$X_2 := 4.0035$	$X_3 := 4.0055$	$X_4 := 4.0075$	$X_5 := 4.0095$

otrzymuje się:

wartość średnią i jej błąd średni:

$$x_{sr} := \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad x_{sr} = 4.0054 \quad m_{sr} := \frac{m}{\sqrt{n}} \quad m_{sr} = 0.0004$$

gęstości wyników pomiarów w poszczególnych przedziałach:

$p_1 = 2/20$; $p_2 = 5/20$; $p_3 = 5/20$; $p_4 = 5/20$; $p_5 = 2/20$;

histogram gęstości wyników pomiarów (rys..2.1) w postaci prostokątów

wzniesionych nad osią x o wysokościach $F := \frac{p}{\Delta x}$ - dobranych tak, aby pola

prostokątów były równe gęstościom pomiarów w poszczególnych przedziałach:

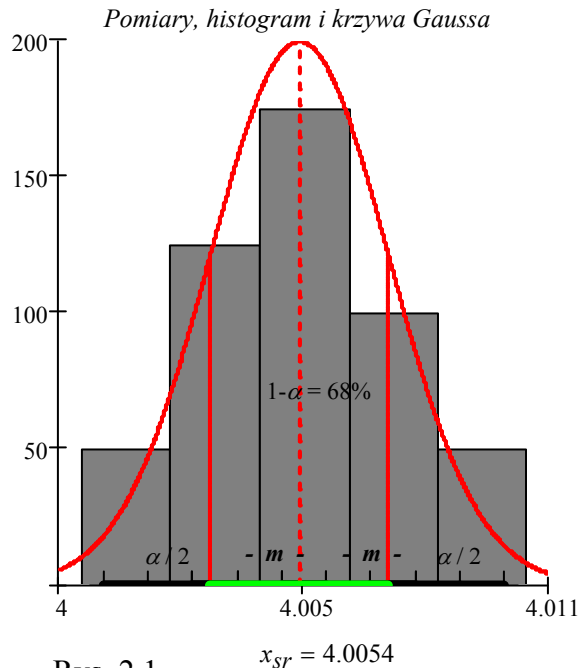
$F_1 = 50$; $F_2 = 125$; $F_3 = 175$; $F_4 = 100$; $F_5 = 50$;

krzywą Gaussa nałożoną na histogram gęstości, nazywaną funkcją gęstości wyników pomiaru (rys..2.1):

$$f(x) := \frac{1}{m \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_{sr}}{m} \right)^2}$$

$f(x_{sr}) = 199.5$ - wartość w punkcie ekstremalnym x_{sr}

$f(x_{sr} + m) = 121.0$ - wartość w punktach przegięcia $x_{sr} \pm m$



Rys. 2.1

Pola obszarów (prawdopodobieństwa wystąpienia wyniku pomiaru $p = 1 - \alpha$) ograniczonych krzywą Gaussa, w przedziałach pojedynczego $x_{sr} \pm m$, podwójnego $x_{sr} \pm 2m$ i potrójnego $x_{sr} \pm 3m$ błędu średniego pomiaru m :

$$\int_{x_{sr}-m}^{x_{sr}+m} f(x) dx = 0.68$$

$$\int_{x_{sr}-2 \cdot m}^{x_{sr}+2 \cdot m} f(x) dx = 0.95$$

$$\int_{x_{sr}-3 \cdot m}^{x_{sr}+3 \cdot m} f(x) dx = 0.997$$

Funkcja gęstości ma tę własność, że im większa jest jej wartość, tym większe jest prawdopodobieństwo wystąpienia wyniku pomiaru z niewielkiego otoczenia punktu $x \pm \Delta x$ i odpowiadającego tej wartości $f(x)$. Największe prawdopodobieństwo wystąpienia wyniku pomiaru jest w otoczeniu wartości średniej x_{sr} (rys. 4.2.1). Gęstość pomiarów p w wybranym przedziale (a, b) jest równa polu powierzchni między osią x i krzywą Gaussa $f(x)$, ograniczonej odciętymi a i b . Pole to jest nazywane prawdopodobieństwem wystąpienia wyniku pomiaru w przedziale (a, b) . Prawdopodobieństwo wystąpienia pomiaru w przedziale $\pm \infty$ wynosi 1. Prawdopodobieństwo wystąpienia pomiaru w określonym przedziale $a < x < b$ nazywane jest *poziomem ufności* $p = 1 - \alpha$, gdzie α jest *współczynnikiem istotności*. Prawdopodobieństwa wystąpienia pomiaru w przedziałach *pojedynczego* $x_{sr} \pm m$, *podwójnego* $x_{sr} \pm 2m$ i *potrójnego* $x_{sr} \pm 3m$ błędu średniego wynoszą 0.683, 0.954 i 0.997 (rys..2.1).

W przypadku zgodności histogramu wyników pomiaru z krzywą Gaussa (rys..2.1):

wyniki mają rozkład normalny $x \sim N(Ex, m^2)$,

standaryzowany błąd v/m ma rozkład normalny *zerojedynkowy* $v \sim N(0, 1)$,

suma kwadratów $\Sigma(v_i / m)^2 \equiv m_0^2(n-1)/m^2$ ma *rozkład chi-kwadrat* o liczbie stopni swobody równej wartości oczekiwanej $E(m_0^2(n-1)/m^2) = n-1$: $m_0^2(n-1)/m^2 \sim \chi^2_{n-1}$ (rys.2.2).

W tym przypadku, alternatywą deterministycznego testu zgodności pomiarów $m_0 \approx m$

$$v := x - x_{sr}$$

$$m_0 := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (v_i)^2}{n-1}}$$

$$m_0 = 0.0023 \approx m = 0.002$$

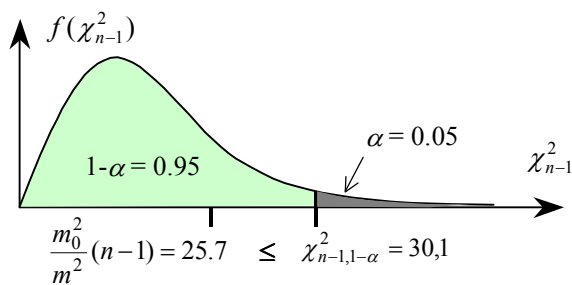
	1
1	-0.003
2	-0.004
3	-0.002
4	-0.001
5	-0.001
6	-0.002

jest test statystyczny

$$\frac{m_0^2}{m^2} (n-1) \leq \chi^2_{n-1, 1-\alpha}$$

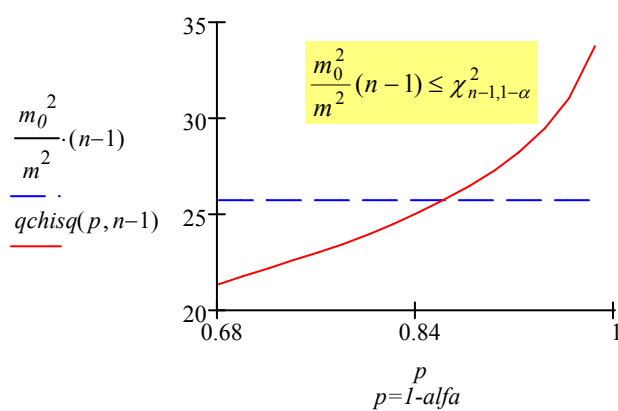
na zadanym poziomie ufności, zwykle $1 - \alpha = 0.95$ (rys. 2.2, 2.3):

$$\frac{m_0^2}{m^2} \cdot (n-1) = 25.7 \leq qchisq(0.95, n-1) = 30.1$$



Rys.2.2

$p := 0.68, 0.70..0.99$ - poziom ufności ($p = 1-\alpha$)



Rys. 2.3

W przypadku pozytywnego wyniku testu odchyłki wyników pomiaru od wartości średniej na ogół zawierają się wewnątrz potrójnego przedziału ich błędu średniego $|v| \leq 3 m_v$:

$$m_v := \sqrt{m^2 - m_{sr}^2} \quad m_v = 0.0019$$

$$-3 \cdot m_v = -0.0058 \leq \begin{matrix} \max(v) = 0.0046 \\ \min(v) = -0.0044 \end{matrix} \leq 3 \cdot m_v = 0.0058$$