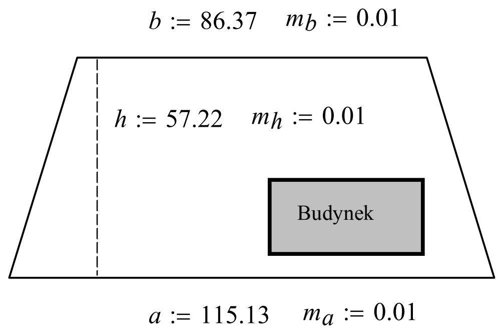
3. Błąd funkcji obserwacji

Wykonywane pomiary pośredniczą zwykle w wyznaczaniu pewnych wielkości nie poddających się bezpośrednio pomiarowi.

Przykład 1. Pole powierzchni działki w kształcie trapezu jest obliczane na podstawie pomierzonych długości boków i wysokości (rys. 3.1):

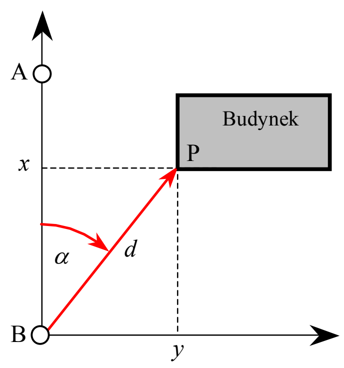


$$P := \frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

$$P = 5764.91 \quad \mathrm{m}^2$$

Rys. 3.1

Przykład 2. Metoda biegunowa jest podstawowym sposobem pomiaru szczegółów terenowych, jak również tyczenia w terenie projektowanych obiektów budowlanych. Współrzędne punktu są wyznaczane na podstawie pomiaru kierunku $\alpha := 30^{\mathrm{g}}$, $m_\alpha := 10^{\mathrm{cc}}$ i odległości $d := 100$ m, $m_d := 5$ mm, wykonanego za pomocą tachimetru ustawionego na punkcie osnowy geodezyjnej B w nawiązaniu do punktu osnowy A (rys. 3.2):



Współrzędne narożnika budynku P względem punktów osnowy geodezyjnej A i B:

$$x_P := d\cdot cos\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{200}\right)$$

$$y_P := d\cdot sin\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{200}\right)$$

$$x_P = 89.101$$

$$y_P = 45.399$$

Rys. .3.2

Błąd funkcji $F = F(x, y)$ obserwacji $x \pm m_x, y \pm m_y$ oblicza się z definicji $m_F{}^2 = E(F–EF)^2$ przy założeniu, że odchyłka funkcji $F–EF$ jest równa różniczce zupełnej:

$$F - EF = \frac{\partial F}{\partial x}(x - Ex) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - Ey)$$

stąd

$$m_F^2 = (\frac{\partial F}{\partial x})^2 m_x^2 + 2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} m_{xy} + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 m_y^2$$

gdzie

$m_x^2 = E(x - Ex)^2$ – wariancja x

$m_y^2 = E(y - Ey)^2$ – wariancja y

$m_{xy} = E(x - Ex)(y - Ey)$ – kowariancja między x i y

Podobnie, z definicji $m_{FG} = E(F-EF)(G-EG)$ oblicza się kowariancję błędu funkcji $F(x,y)$ i $G(x,y)$:

$$m_{FG} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x} m_x^2 + (\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}) m_{xy} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} m_y^2$$

Wzory te dla funkcji wielu obserwacji $F(x,y,...,t)$, $G(x,y,...,t)$, przyjmują postać:

$$m_F^2 = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial t} \end{bmatrix}}^{\mathbf{f}\text{ – gradient funkcji}} \overbrace{\begin{bmatrix} m_x^2 & m_{xy} & \cdots & m_{xt} \\ m_{xy} & m_y^2 & \cdots & m_{yt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{xt} & m_{yt} & \cdots & m_t^2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{C}\text{ – macierz kowariancji błędu obserwacji } x,y,...,t} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial t} \end{bmatrix}$$

$$m_{FG} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x^2 & m_{xy} & \cdots & m_{xt} \\ m_{xy} & m_y^2 & \cdots & m_{yt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{xt} & m_{yt} & \cdots & m_t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \\ \vdots \\ \frac{\partial G}{\partial t} \end{bmatrix}$$

lub krótko:

$$m_F = \sqrt{\mathbf{fCf}^T}$$

$$m_{FG} = \mathbf{f}_F \mathbf{C} \mathbf{f}_G^T$$

W przypadku pomiarów niezależnych - *kowariancje zerowe* otrzymuje się:

$$m_F = \sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2 m_x^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 m_y^2 + ... + (\frac{\partial F}{\partial t})^2 m_t^2}$$

$$m_{FG} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x} m_x^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} m_y^2 + ... + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial t} m_t^2$$

Macierz

$$\begin{bmatrix} m_F^2 & m_{FG} & \cdots & m_{FT} \\ m_{FG} & m_G^2 & \cdots & m_{GT} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{FT} & m_{GT} & \cdots & m_T^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_F\mathbf{C}\mathbf{f}_F^T & \mathbf{f}_F\mathbf{C}\mathbf{f}_G^T & \cdots & \mathbf{f}_F\mathbf{C}\mathbf{f}_T^T \\ \mathbf{f}_F\mathbf{C}\mathbf{f}_G^T & \mathbf{f}_G\mathbf{C}\mathbf{f}_G^T & \cdots & \mathbf{f}_G\mathbf{C}\mathbf{f}_T^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{f}_F\mathbf{C}\mathbf{f}_T^T & \mathbf{f}_G\mathbf{C}\mathbf{f}_T^T & \cdots & \mathbf{f}_T\mathbf{C}\mathbf{f}_T^T \end{bmatrix}$$

nazywana jest *macierzą kowariancji błędu funkcji* $F(x, y,... ,t)$, $G(x, y,...,t)$,...,$T(x, y,...,t)$. Zależność między funkcjami $F,G,...,T$ wyraża się często za pomocą macierzy współczynników korelacji:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{FG} & \cdots & \rho_{FT} \\ \rho_{FG} & 1 & \cdots & \rho_{GT} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{FT} & \rho_{GT} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

obliczonych z definicji: $m_{FG} = \rho_{FG} m_F m_G$, $|\rho| \le 1$.

W szczególności, przy założeniu jednakowych odchyleń standardowych funkcji
$m_F = m_G = ... = m_T = m$ macierz kowariancji przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} m_F^2 & m_{FG} & \cdots & m_{FT} \\ m_{FG} & m_G^2 & \cdots & m_{GT} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{FT} & m_{GT} & \cdots & m_T^2 \end{bmatrix} = m^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{FG} & \cdots & \rho_{FT} \\ \rho_{FG} & 1 & \cdots & \rho_{GT} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{FT} & \rho_{GT} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz kowariancji błędu funkcji $F, G, ..., T$ można rozpatrywać jako macierz kowariancji wektorowej funkcji $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [F(\mathbf{x}), G(\mathbf{x}), ..., T(\mathbf{x})]^T$ obserwacji wielowymiarowej
$\mathbf{x} = [x, y, ..., t]^T$.
Z definicji $\mathbf{C_F} = E(\mathbf{F} - E\mathbf{F})(\mathbf{F} - E\mathbf{F})^T$, traktując odchyłkę $\mathbf{F} - E\mathbf{F}$ jak różniczkę zupełną funkcji:

$$\mathbf{F} - E\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x} - E\mathbf{x})$$

gdzie *jakobian*

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial F / \partial \mathbf{x} \\ \partial G / \partial \mathbf{x} \\ \vdots \\ \partial T / \partial \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_F \\ \mathbf{f}_G \\ \vdots \\ \mathbf{f}_T \end{bmatrix}$$

jest gradientem funkcji $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, otrzymuje się

$$\mathbf{C_F} = \mathbf{JCJ}^T$$

Podobnie jest obliczana macierz kowariancji błędu $\mathbf{C_{FG}} = E(\mathbf{F} - E\mathbf{F})(\mathbf{G} - E\mathbf{G})^T$ funkcji wektorowych $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{G}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{C_{FG}} = \mathbf{J_F C J_G^T}$$

gdzie $\mathbf{J}_F$, $\mathbf{J}_G$ są gradientami funkcji $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{G}(\mathbf{x})$.
Stąd, w przypadku funkcji liniowych $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$, $\mathbf{z} = \mathbf{Bx} + \mathbf{c}$ wektora obserwacji $\mathbf{x}$ o macierzy kowariancji $\mathbf{C_x}$:

$$\mathbf{C_y} = \mathbf{AC_xA}^T, \quad \mathbf{C_{yz}} = \mathbf{AC_xB}^T, \quad \mathbf{C_z} = \mathbf{BC_xB}^T$$

Wzory do obliczania błędu funkcji obserwacji nazywane są *prawem przenoszenia błędów przypadkowych*.

Przykład 1 (ciąg dalszy). Błąd pola powierzchni działki wynosi (rys. 3.1):

$$m_P := \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot m_a^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot m_b^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot m_h^2} \qquad m_P = 1.09 \ \ \mathrm{m}^2$$

Przykład 2 (ciąg dalszy). Błędy średnie współrzędnych pomierzonego punktu (rys. 3.2) m_x, m_y i kowariancja błędu współrzędnych m_{xy}:

$$m_x := \sqrt{\cos(\alpha)^2 \cdot m_d^2 + d^2 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot m_\alpha^2} \qquad m_x = 2.15$$

$$m_y := \sqrt{\sin(\alpha)^2 \cdot m_d^2 + d^2 \cdot \cos(\alpha)^2 \cdot m_\alpha^2} \qquad m_y = 4.78$$

$$m_{xy} := \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot m_d^2 - d^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot m_\alpha^2 \qquad m_{xy} = 6.62$$

służą do obliczenia błędu położenia punktu

$$m_P := \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \quad \text{lub w postaci} \quad m_P := \sqrt{m_d^2 + d^2 \cdot m_\alpha^2} \qquad m_P = 5.24$$

oraz zestawienia macierzy błędu położenia punktu:

$$C := \begin{pmatrix} m_x^2 & m_{xy} \\ m_{xy} & m_y^2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4.619 & 6.622 \\ 6.622 & 22.848 \end{pmatrix}$$

Na podstawie macierzy błędu położenia punktu **C** jest obliczany błąd położenia punktu w dowolnym kierunku, w szczególności ekstremalne wartości błędu i ich kierunki