

Wykład 4

Podstawowe wiadomości z teorii błędów

*Prof. dr hab. Adam Łyszkowicz
Katedra Geodezji Szczegółowej
UWM w Olsztynie
adam.l@uwm.edu.pl
Heweliusza 12, pokój 04*

Treść Wykładu

- Obserwacje geodezyjne
- Źródła błędów
- Typy obserwacji
- Typy błędów
- Właściwości błędów przypadkowych
- Krzywa Gaussa
- Niezawodność pomiarów geodezyjnych
- Miary precyzji
- Podsumowanie

Co pomiar to inny wynik !



- 65.44, 65.49, 65.52, 65.47 metrów
- Pytania:
 - Dlaczego różne wyniki ?
 - Co jest końcowym wynikiem ?
 - Jaka jest dokładność pomiaru?

ŹRÓDŁA BŁĘDÓW

```
graph TD; A[ŹRÓDŁA BŁĘDÓW] --> B[Osobiste: - ograniczenia obserwatora - nieuwaga obserwatora]; A --> C[Instrumentalne: z powodu niedoskonałości konstrukcji lub niedoskonałości rektyfikacji instrumentów]; A --> D[Naturalne: z powodu zmian warunków środowiska w jakich pomiar jest wykonywany];
```

Osobiste:
- ograniczenia obserwatora
- nieuwaga obserwatora

Instrumentalne:
z powodu niedoskonałości konstrukcji lub niedoskonałości rektyfikacji instrumentów

Naturalne:
z powodu zmian warunków środowiska w jakich pomiar jest wykonywany

SOURCES OF ERRORS

```
graph TD; A[SOURCES OF ERRORS] --> B[Personal:]; A --> C[Instrumental:]; A --> D[Natural:];
```

Personal:

- limitation of observer (the ability to repeat the same measurement)
- carelessness of the observer

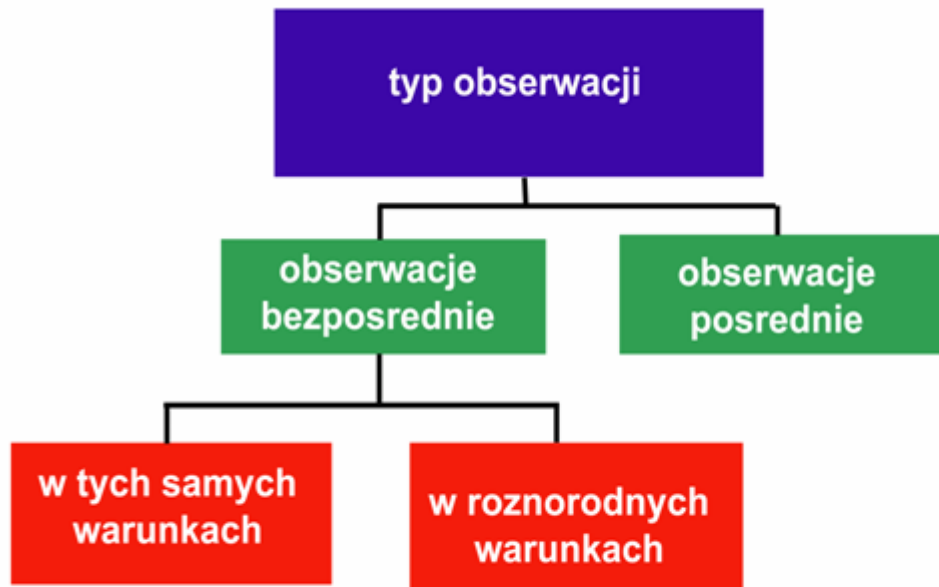
Instrumental:

- Due to imperfect construction or incomplete adjustment of the instrument
- e.g. Incorrect graduation

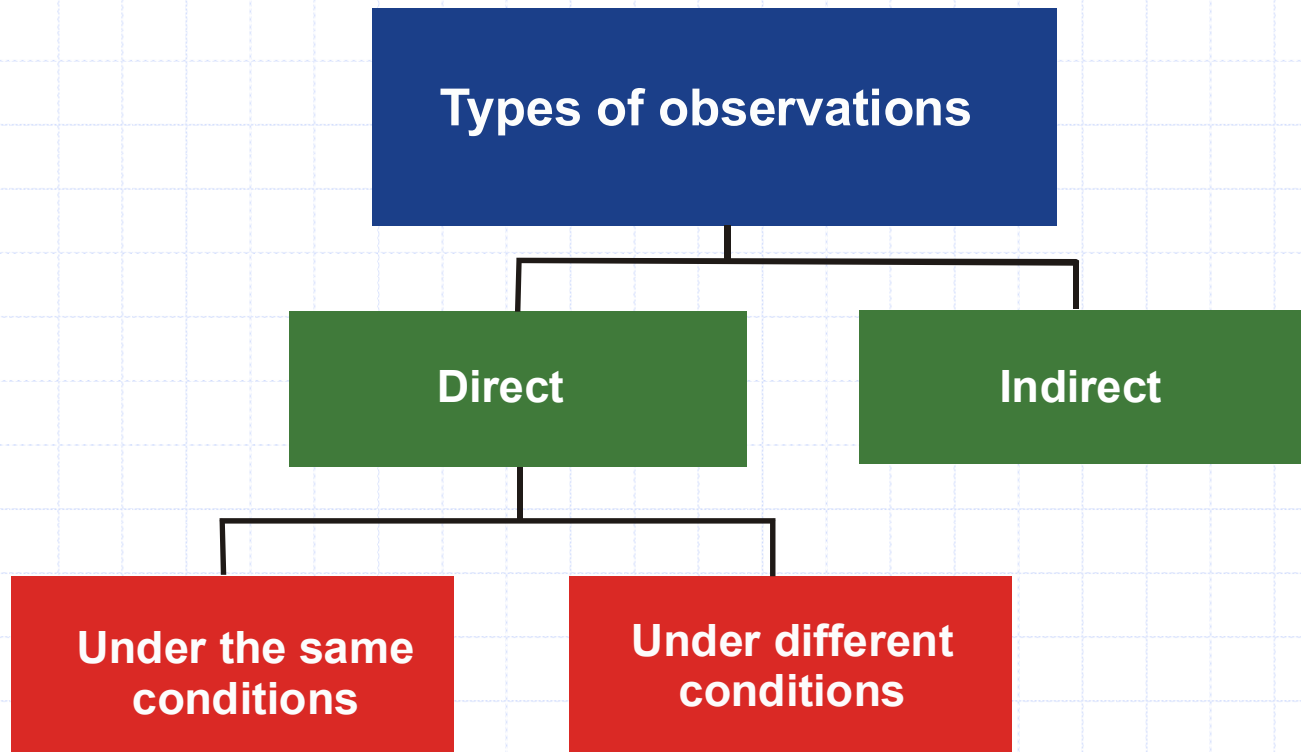
Natural:

- Due to changing environmental conditions in which the measurements are made
- e.g. Temperature variation causes expansion/contraction of the chain

Typy obserwacji



Type of observations



Obserwacje bezpośrednie

- Przykładem pomiaru bezpośredniego jest kilkakrotny pomiar taśmą stalową odległości między pewnymi punktami A i B



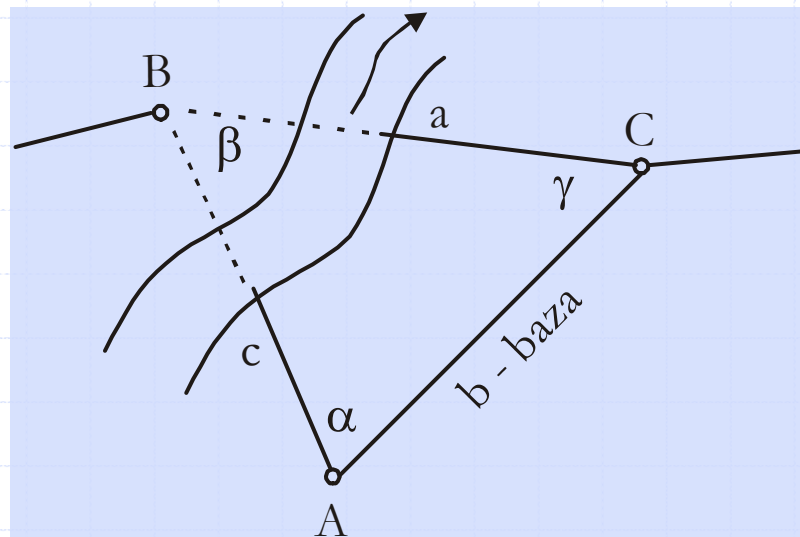
Obserwacje bezpośrednie

- Pomiar kąta poziomego
- praktyka z geodezji, lato 2004



Obserwacje pośrednie

- Celem tego pomiaru jest wyznaczenie odległości między punktami A i B oraz C i B. Punkt B jest niedostępny, gdyż znajduje się za rzeką.
- W tym celu należy pomierzyć odległość b zwaną bazą oraz trzy kąty w trójkącie.
- Z twierdzenia sinusów można obliczyć odległości a i c.



Klasyfikacja błędów

- Błędy grube
- Błędy systematyczne
- Błędy przypadkowe

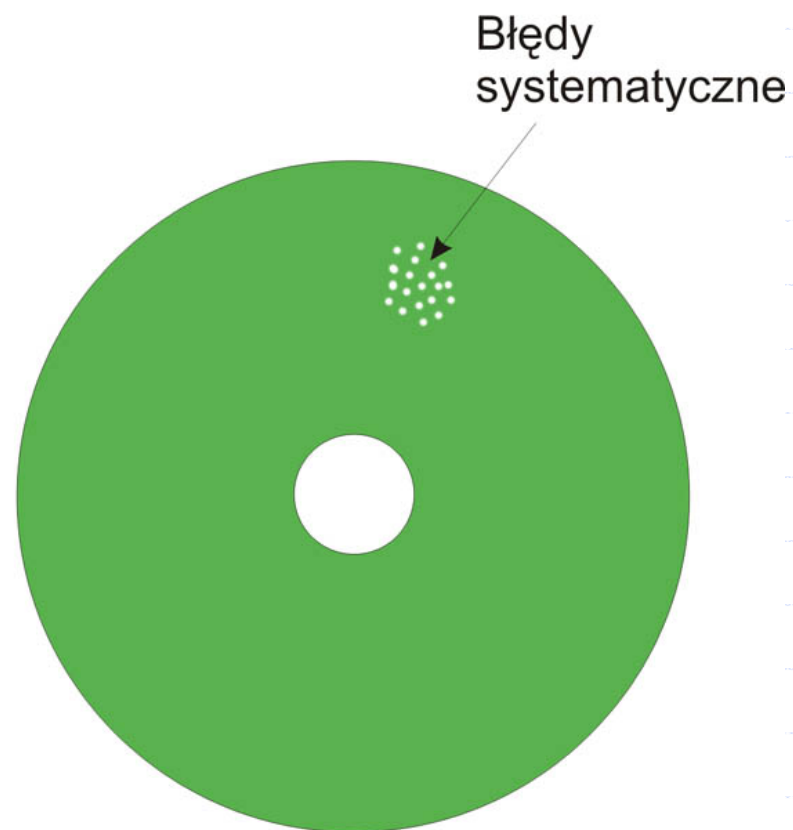
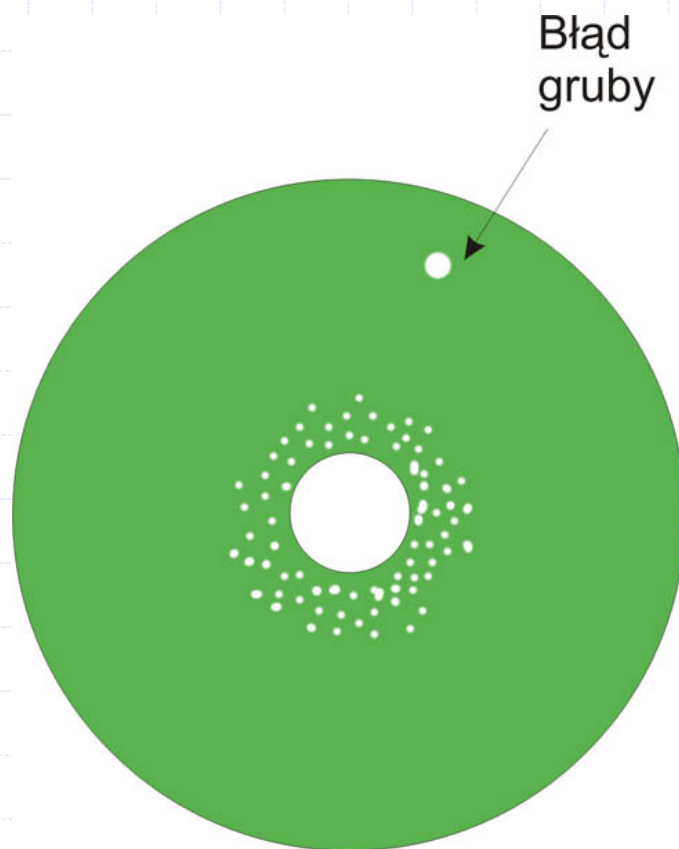
Omyłki lub błędy grube

- **Charakterystyka:** ich wielkość jest stosunkowo duża, mała lub różna w porównaniu do mierzonej wielkości (obserwacja odstająca).
- **Źródło błędu:** personalne (brak uwagi obserwatora).
- **Skutek:** obserwacje niejednorodne.
- **Zalecane postępowanie:** obserwacja taka musi być wykryta i usunięta z serii pomiarowej.
- **Przykład:** *Licząc przy pomiarze odległości ilość przyłożeń taśmy, zapisano w dzienniku pomiarowym o jedno przyłożenie za mało lub za dużo popełniając przez to błąd 20 m.*

Błędy systematyczne

- **Charakterystyka:** występują w deterministyczny sposób, jeśli znany to jest możliwość ich wyeliminowania na drodze rachunkowej.
- **Źródła błędów:** z powodu instrumentów, środowiska, człowieka bądź ich kombinacji.
- **Skutek:** przesunięcie wszystkich obserwacji, które jeśli jest stałe to jego wielkość i znak pozostają niezmiennie w czasie pomiaru.
- **Zalecane postępowanie:** koniecznie powinny być zidentyfikowane i wyeliminowane z wyniku pomiaru.
- *Jako przykład tego rodzaju błędu może posłużyć błąd wywołany wydłużeniem lub skróceniem się taśmy mierniczej pod wpływem temperatury.*

Graficzna ilustracja błędów grubych i systematycznych



Błędy przypadkowe

- **Charakterystyka**: są to błędy, jakie tkwią w wyniku pomiaru po usunięciu błędów grubych i systematycznych. Nie można opisać ich żadnym modelem deterministycznym. Do ich modelowania stosuje się jedynie model stochastyczny.
- **Źródła błędów**: personalne, instrumentalne i środowisko.
- **Skutek**:
- **Zalecane postępowanie**:

Błąd prawdziwy i pozorny

- Błąd prawdziwy $\varepsilon_i = L - l_i$
- Ponieważ L nigdy nie jest znane, ε również nigdy nie jest znane.
- Na szczęście obydwie wielkości mogą być oszacowane. Oszacowanie błędu prawdziwego nazywa się błędem pozornym
- $v_i = x - l_i$, gdzie x jest oszacowaniem wielkości L .

True error and residuals

- True error $\varepsilon_i = L - l_i$, because L is never known, ε is never known too,
- Residuals are defined in the following way $v_i = x - l_i$

Oszacowanie mierzonej wielkości

- Oszacowanie mierzonej wielkości i jej błędu nie jest zagadnieniem ani **prostym** ani **łatwym**. Opanowanie tej umiejętności wymaga studiów z zakresu rachunku wyrównawczego. Tu przedstawimy tylko elementarne wiadomości z tego zakresu.
- Wykonano n pomiarów wielkości L (l_1, l_2, \dots, l_n). *Intuicyjnie jest zrozumiałym*, że średnia arytmetyczna

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i$$

- jest najlepszym oszacowaniem nieznanej wielkości L

Przykład liczbowy 1

nr.	obserwacje [m]	v [m]
1	65.43	-0.048
2	65.49	0.012
3	65.52	0.042
4	65.47	-0.008
5	65.48	0.002
	Średnia = 65.478	Suma = 0.000

Suma v_i zawsze jest równa zero

$v_1 = l_1 - x$
$v_2 = l_2 - x$
$v_3 = l_3 - x$
....
....
....
$v_n = l_n - x$
$\Sigma v = \Sigma l - nx$

$$x = \frac{1}{n} \sum 1$$

$$nx = \sum 1$$

$$\sum v = \sum l - nx = \sum l - \sum 1 = 0$$

Uzasadnienie, że średnia arytmetyczna jest najlepszym oszacowaniem

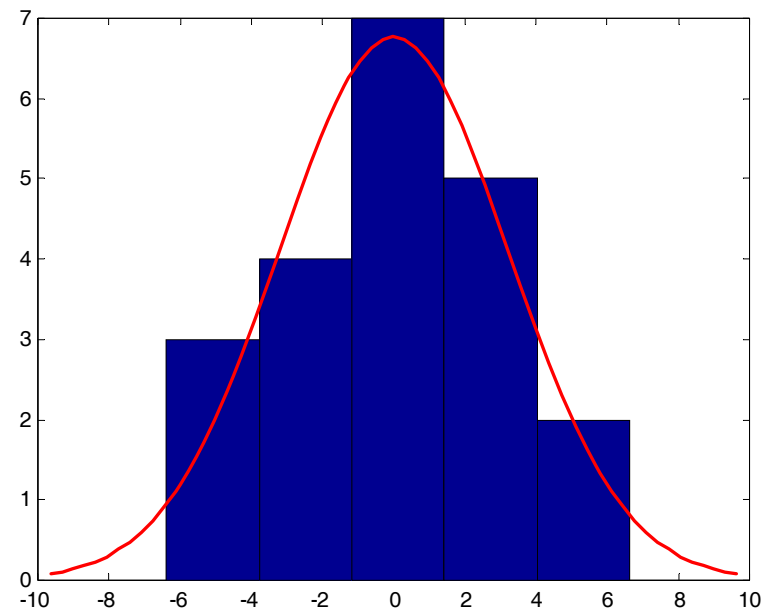
- Co znaczy „najlepsze oszacowanie” ?

$$\sum v^2 = \min$$

- Aby poprawki były minimum
 - ♦ Pierwsza pochodna musi być równa zero,
 - ♦ Druga pochodna większa od zera

Histogram

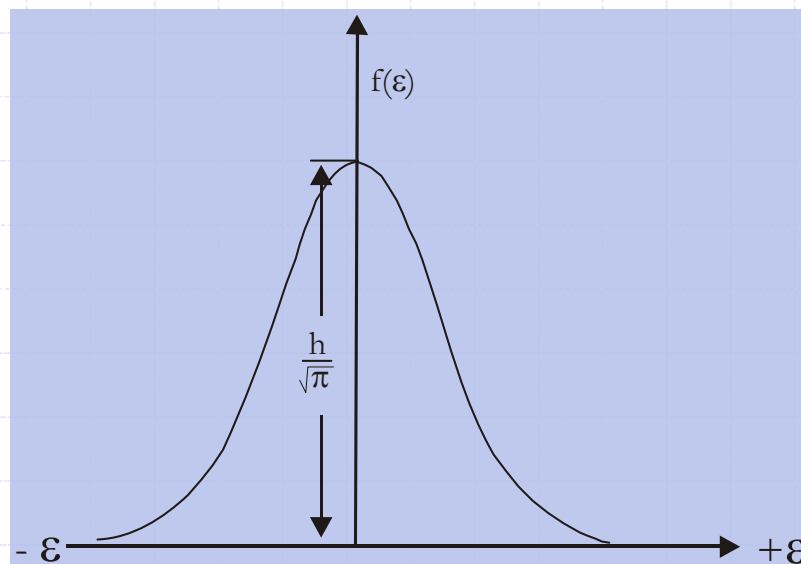
Mierzona odległość [m]	Poprawki v po uszeregowaniu [mm]
231.231	-6.4
231.228	-4.4
231.235	-4.4
231.223	-3.4
231.221	-2.4
231.219	-1.4
231.221	-1.4
231.232	-0.4
231.225	-0.4
231.228	-0.4
231.234	-0.4
231.227	-0.4
231.226	-0.4
231.229	0.6
231.231	2.6
231.222	2.6
231.233	2.6
231.219	2.6
231.239	3.6
231.233	4.6
231.223	6.6
231.228	



Krzywa Gaussa

- Wielu uczonych od lat próbowało opisać histogram krzywą. Ostatecznie powszechnie zaakceptowano model podany przez Gaussa (krzywa Gaussa), której analityczny wzór jest

$$f(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$$



Gauss

- Carl Friedrich Gauss lived from 1777 to 1855.
- Gauss worked in a wide variety of fields in both mathematics and physics including number theory, analysis, differential geometry, **geodesy**, magnetism, astronomy and optics.
- His work has had an immense influence in many areas.



Właściwości krzywej Gaussa

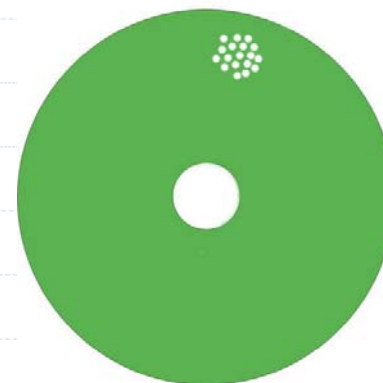
- Pole pod krzywą jest równe jedności,
- Krzywa jest symetryczna względem $\varepsilon = 0$.
Prawdopodobieństwo występowania błędów dodatnich i ujemnych jest jednakowe,
- Prawdopodobieństwo występowania małych błędów jest bardzo duże,
- Prawdopodobieństwo występowania bardzo dużych błędów jest praktycznie niemożliwe.

Ocena Wyniku Pomiaru

- **Precyzja:** pomiaru jest to stopień wzajemnej bliskości pomiarów tej samej wielkości. Precyzja pomiaru jest obarczona wpływem tylko błędów przypadkowych.
- **Dokładność:** stopień zbliżenia pomiarów do wielkości prawdziwej. Dokładność pomiaru jest obarczona zarówno błędami przypadkowymi jak i systematycznymi.
- **Niepewność:** jest to wielkość przedziału wewnątrz którego mieszczą się błędy pomiarowe.

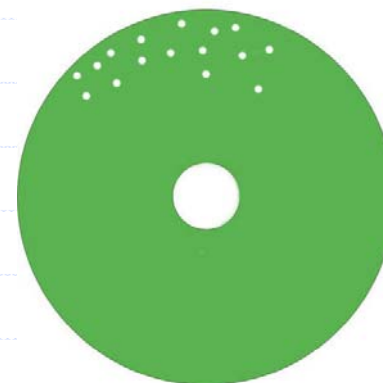
Precyzja i dokładność

- pomiary precyzyjne ale niedokładne
- pomiary nieprecyzyjne ale dokładne

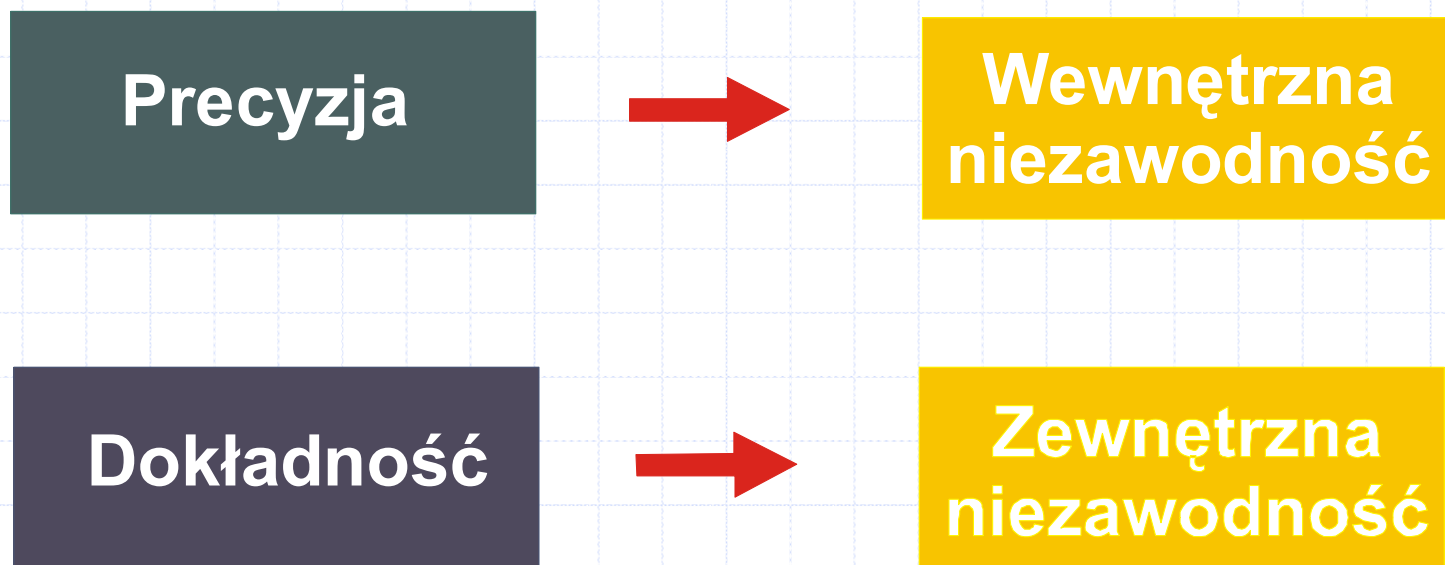


Precyzja i dokładność

- pomiary nieprecyzyjne i niedokładne
- pomiary precyzyjne i dokładne



Precyzja i dokładność

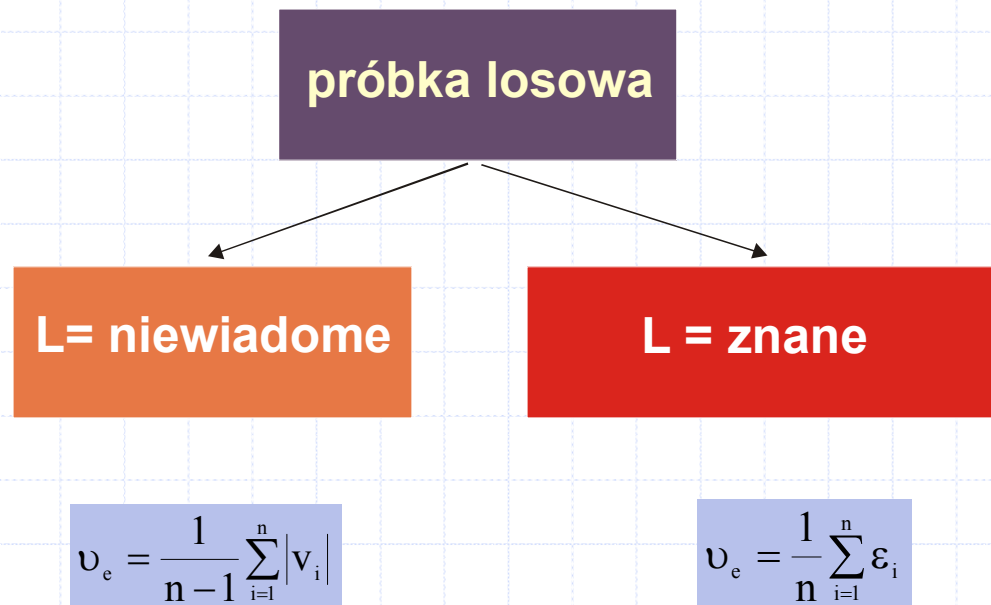


- W przypadku braku występowania błędów systematycznych, pojęcie dokładności pomiaru jest równoważne z pojęciem precyzji.

Miary Precyzji

- Błąd przeciętny
- Błąd prawdopodobny
- Błąd średni (estymator odchylenia standardowego)

Błąd przeciętny



- Błąd przeciętny ν_e jest to średnia arytmetyczna bezwzględnych wartości błędów próbki losowej (serii pomiarowej)

Błąd prawdopodobny

- połowa błędów pomiarowych jest mniejsza od P_e natomiast druga połowa błędów jest większa od błędu P_e .

♦ $50\% z |v_i| > P_e, \quad 50\% z |v_i| < P_e.$

- W przypadku parzystej liczby błędów.

$$P_e = V\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

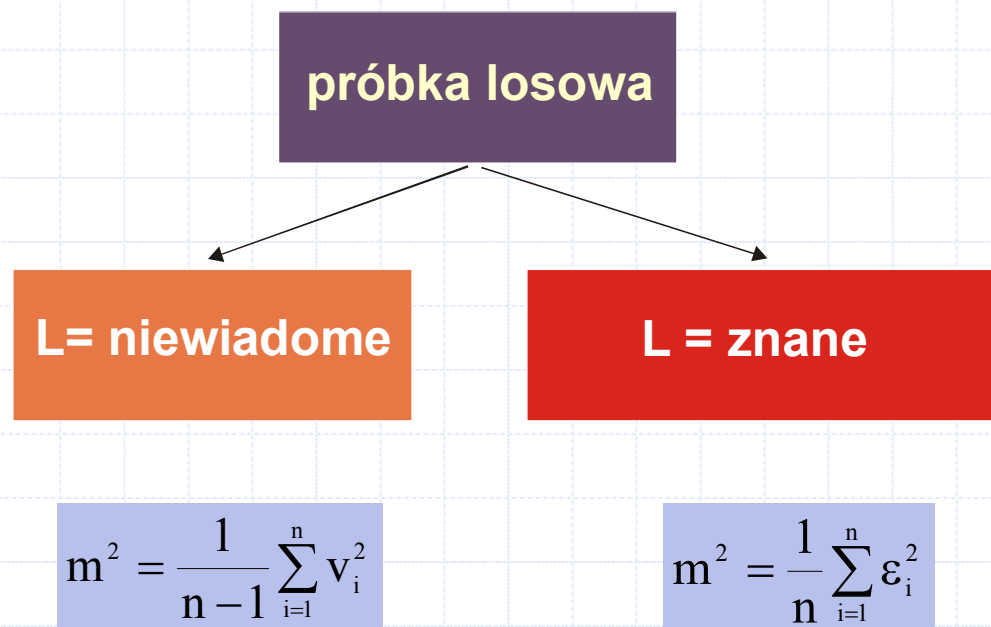
- W przypadku nieparzystej liczby błędów.

$$P_e = \frac{1}{2} \left[V\left(\frac{n}{2}\right) + V\left(\frac{n}{2} + 1\right) \right]$$

Przykład liczbowy 2

nr.	obserwacje [m]	v [m]	v [cm]	Błąd prawd.
1	65.43	-0.048	4.8	- 4.8
2	65.49	0.012	1.2	- 0.8
3	65.52	0.042	4.2	0.2
4	65.47	-0.008	0.8	1.2
5	65.48	0.002	0.2	4.2
	średnia =65.478	suma =0.000	bł. prz. =2.8	bł.praw.=0.2

Błąd średni



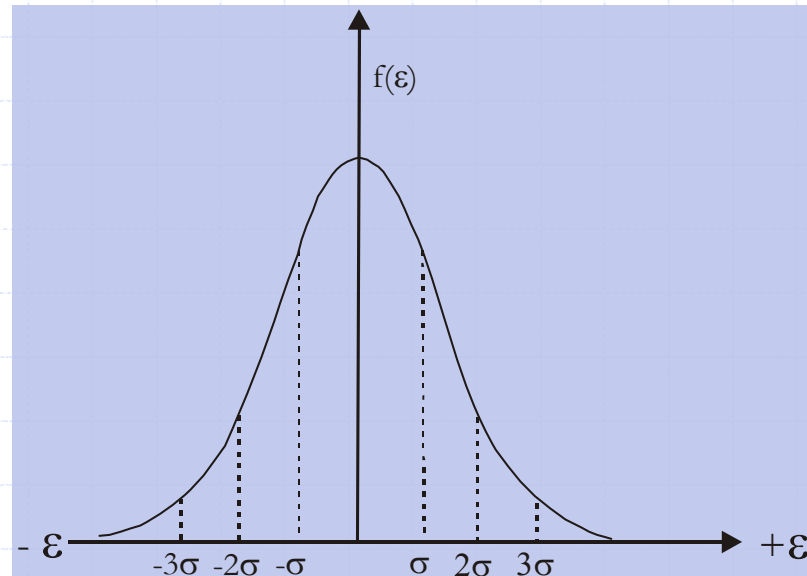
- Błąd średni m jest definiowany jako pierwiastek kwadratowy średniej arytmetycznej sumy kwadratów błędów.

Przykład liczbowy 3

nr.	obserwacje [m]	v [m]	v ² [cm ²]
1	65.43	-0.048	23.0
2	65.49	0.012	1.4
3	65.52	0.042	17.6
4	65.47	-0.008	0.6
5	65.48	0.002	0.0
	Średnia = 65.478	Suma = 0.000	Suma = 42.8

Cenna właściwość

- prawdopodobieństwo wystąpienia przypadkowego błędu w przedziale $-m < \varepsilon < m$ jest równe 0.683, w przedziale $-2m < \varepsilon < 2m$ wynosi 0.954, natomiast w przedziale $-3m < \varepsilon < 3m$ jest równe **0.997**.
- W praktyce przedział $3m$ jest uważany jako granica występowania błędów i uważa się, że obserwacje obarczone błędami przekraczającymi te granice powinny być odrzucone jako obserwacje błędne.



Obserwacje bezpośrednie jednakowo i nie jednakowo dokładne

- Przez obserwacje bezpośrednie **jednakowo dokładne** rozumiemy obserwacje wykonane w tych samych warunkach, to znaczy, że obserwator, instrument i środowisko jest takie same
- Przez obserwacje bezpośrednie **nie jednakowo dokładne** rozumiemy obserwacje bezpośrednie wykonane w odmiennych warunkach, oznacza to, że obserwator, instrument lub warunki środowiska uległy zmianie.

Wagi

- W celu uwzględnienia różnicy w dokładności „pomiarów” wprowadzono nowe pojęcie zwane wagą

$$p = \frac{k}{m^2}$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności.

Przykład: $m_1=0.5$, $m_2=0.25$,

$$k=1 \quad p_1=2, \quad p_2=4$$

$$k=4 \quad p_1=8, \quad p_2=16$$

Wagi

- Jeśli pewna obserwacja ma wagę równą jedności ($p=1$), to kwadrat błędu średniego oznaczany jest przez m_0 i wynosi:

$$1 = k / m_0^2$$

- Z czego wynika, że

$$k = m_0^2$$

- A zatem współczynnik proporcjonalności jest niczym innym jak kwadratem błędu średniego obserwacji o wadze równej jedności. Dlatego ostatecznie mamy

$$p = m_0^2 / m^2$$

Wagi

- Wagi są definiowane:
 - Wagi są to liczby odwrotnie proporcjonalne do wartości kwadratu błędu średniego,
 - Wagi są to liczby dodatnie, które wyrażają liczby jednakowo dokładnych obserwacji.

Ogólna średnia arytmetyczna

- Jeżeli rozważymy n obserwacji $l_1, l_2, l_3 \dots$ z wagami $p_1, p_2, p \dots$ to wówczas warunek $\sum v^2 = \min$ ma postać $\sum p v^2 = \min$

czyli pierwsza pochodna musi być równa zero

$$\frac{d(\sum p v^2)}{d\hat{x}} = 2p_1 v_1 \frac{dv_1}{d\hat{x}} + 2p_2 v_2 \frac{dv_2}{d\hat{x}} + \dots = 0$$

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + \dots = \sum p v = 0$$

$$p_1(\hat{x} - l_1) + p_2(\hat{x} - l_2) + \dots = 0$$

$$(p_1 + p_2 + \dots)\hat{x} = p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots$$



$$\hat{x} = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots}{p_1 + p_2 \dots} = \frac{\sum p l}{\sum p}$$

$$m_o = \sqrt{\frac{\sum p v^2}{(n-1)}}$$

Prawo przenoszenia się błędów

- Przez przenoszenie się błędów rozumiemy proces polegający na ocenie błędów obliczonych wielkości niewiadomych Y będących funkcją błędów wielkości mierzonych X

- $$y = a + b x$$

- Jeśli zastosujemy koncepcje wielkości prawdziwej to zgodnie z tą intencją można napisać, że

$$y_L = a + b x_L$$

- Ponieważ błąd pomiaru jest zdefiniowany jako różnica między wielkością pomierzoną a wielkością prawdziwą, to

$$y - y_L = b(x - x_L)$$

- co w skrócie można napisać w postaci

$$dy = b dx$$

$$\sigma_y = b \sigma_x$$

Przykład

nr	Kąt l	$\Delta = l - l_0$	Waga p	p Δ	v	pv	pvv
1	23.4067	67	1	67	-13	-13	161
2	23.4011	53	2	106	1	3	3
3	23.4042	42	3	126	12	37	454
4	23.4093	61	4	244	-7	-27	180

suma = 10 543 -6 0 798

$$x = 23.4000 + 0.0054 = 23.4054^g$$

$$m_0 = 0.0016^g$$

Błąd średni z pary pomiarów

- l_1 obserwacja z błędem prawdziwym ε_1 , l_2 obserwacja z błędem prawdziwym ε_2 , to

$$l_1 + \varepsilon_1 = l_2 + \varepsilon_2$$

$$l_1 - l_2 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$d_1 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$m_d = \pm \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$$

$$m_d = \pm m_o \sqrt{2}$$

$$m_o = \pm \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{\sum d^2}{2n}}$$

Prawo przenoszenia się błędów

- Przez przenoszenie się błędów rozumiemy proces polegający na ocenie błędów obliczonych wielkości niewiadomych y będących funkcją wielkości mierzonych x .
- Rozważmy prosty przykład. Wielkość y została wyznaczona z pomiaru wielkości x z zależności

$$y = ax + b$$

Jeśli x_L – wielkość prawdziwa, x – wielkość mierzona, dx błąd pomiaru to

$$x = x_L + dx$$

$$y_L = ax_L + b$$

$$y = a x + b = a (x_L + dx) + b = a x_L + b + a dx = y_L + a dx$$

$$dy = a dx$$

$$dy = \frac{dy}{dx} dx$$

Funkcja liniowa i dowolna

$$y = l_1 + l_2 + \dots$$

$$m_y^2 = m_1^2 + m_2^2 + \dots$$

Przykład. Odcinek AB składa się z dwóch części. Pierwszą część pomierzono z błędem średnim ± 3 cm, drugą część pomierzono z błędem średnim ± 8 cm. Oblicz błąd średni odcinka AB?

$$y = a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots$$

$$m_y^2 = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \dots$$

Przykład. Odległość pomierzona dalmierzem oblicza się według wzoru $d = k l$, gdzie l jest mierzonym odcinkiem na łacie z błędem średnim ± 3 mm. Oblicz błąd mierzonej odległości d jeśli stała $k = 100$.

Dowolna funkcja

$$y = f(x_1, x_2, \dots)$$

$$m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$$

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 m_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 m_{x_n}^2$$

Przykład. Pomierzono działkę w kształcie prostokąta o bokach $a = 123.54$ m, i $b = 54.34$ m. Bok a pomierzono z błędem średnim ± 3 cm, a bok b z błędem średnim ± 6 cm. Oblicz błąd powierzchni działki.



Thank you for attention



Pomiar czyli obserwacja geodezyjna

- Obserwacje (l_1, l_2, \dots, l_n) są wykonywane określonymi instrumentami (taśma stalowa, teodolit) przez określonego obserwatora i w określonym środowisku.
- Wszystkie obserwacje są obarczone błędami.
- Przez błąd rozumiemy różnicę między obserwacją pewnej wielkości l_i a jej wartością prawdziwą L , która oczywiście nigdy nie jest znana.