

Powszechnie stosowane do zagęszczania osnów poziomych wcięcia są podstawowymi zadaniami geodezyjnymi, polegającymi na wyznaczeniu położenia sytuacyjnego (współrzędnych  $X, Y$ ) pojedynczego punktu szukanego (wcinanego), rzadziej dwóch punktów (np. w zadaniach Hansena i Mareka) lub sporadycznie grupy kilku punktów. Jest to możliwe dzięki geometrycznemu powiązaniu punktów wcinanych z punktami znanymi za pomocą pomierzonych w konstrukcji wcięcia tzw. *elementów wyznaczających*: kątów poziomych i (lub) długości boków. *Wcięcia pojedyncze*, nazywane także zwykłymi lub elementarnymi, są zadaniami jednoznacznie wyznaczalnymi, a więc zawierającymi tylko tyle spostrzeżeń  $n$ , ile jest niezbędne do określenia  $u$  niewiadomych ( $n = u$ ), którymi w tym przypadku są współrzędne prostokątne  $X, Y$  punktów szukanych. Jeden punkt wcinany dostarcza dwóch niewiadomych, toteż w konstrukcji wcięcia pojedynczego konieczny jest pomiar dwóch elementów wyznaczających. Wcięcia pojedyncze nie zawierają spostrzeżeń nadliczbowych, a tym samym nie występuje w nich także problem wyrównania. *Wcięcia wielokrotne* w odróżnieniu od wcięć pojedynczych zawierają więcej spostrzeżeń niż niewiadomych ( $n > u$ ), a więc poszukiwane współrzędne punktów wciętych uzyskujemy jako niewiadome w rezultacie wyrównania obserwacji.

W trakcie zagęszczania osnowy poziomej metodą wcięć mogą występować rozmaite rodzaje linii celowania (celowych) klasyfikowanych według dwóch kryteriów. Pierwszym z nich jest sposób celowania wzdłuż danego boku. W przypadku, gdy podczas pomiaru kątów poziomych o wspólnym ramieniu  $AB$  celowanie odbywa się zarówno w kierunku  $A \rightarrow B$ , jak i w kierunku przeciwnym  $B \rightarrow A$ , to taką linię celowania nazywamy *celową dwustronną*, a na szkicach konstrukcji osnów zaznaczamy ją linią ciągłą. *Celowa jednostronna* jest linią, wzdłuż której pomiar kierunku następuje tylko z jej jednego końca. Na drugim końcu celowej jednostronnej nie ma stanowiska teodolitu, a więc nie występuje drugie celowanie w kierunku przeciwnym. Brak możliwości obustronnego celowania wynika przeważnie z braku widoczności na drugim stanowisku lub niedostępności punktu końcowego. Celową jednostronną zaznaczamy na szkicach linią w połowie ciągłą (od strony stanowiska pomiaru kąta), w połowie zaś – przerywaną.

Drugim kryterium podziału celowych łączących punkty znane i szukane, czyli tzw. *celowych wyznaczających*, jest rodzaj punktu, będącego stanowiskiem teodolitu podczas pomiarów kątów poziomych. *Celowe zewnętrzne* (celowe w przód) są liniami wychodzącymi z punktów znanych w kierunku punktów szukanych (np. przy wcięciu kątowym w przód), natomiast *celowe wewnętrzne* (celowe wstecz) biegną w kierunku odwrotnym, a więc dla nich stanowisko pomiarowe znajduje się na dostępnym punkcie szukanym (wcinanym), z którego celujemy na punkty znane (przy wcięciu wstecz). Pojęcie celowych zewnętrznych i wewnętrznych przeważnie nie występuje podczas pomiarów liniowych, chociaż przy pomiarze odległości dalmierzami zależnie od usytuowania ich stanowisk używa się niekiedy pojęć pomiarów liniowych w przód (z punktów znanych) lub wstecz (z punktu wyznaczanego).

Wcięcia pojedyncze odgrywają w praktyce geodezyjnej dużą rolę, umożliwiając szybkie i łatwe wyznaczenie położenia punktów dostępnych i niedostępnych. Wśród licznych zastosowań tych wcięć można wymienić: określenie współrzędnych przybliżonych do

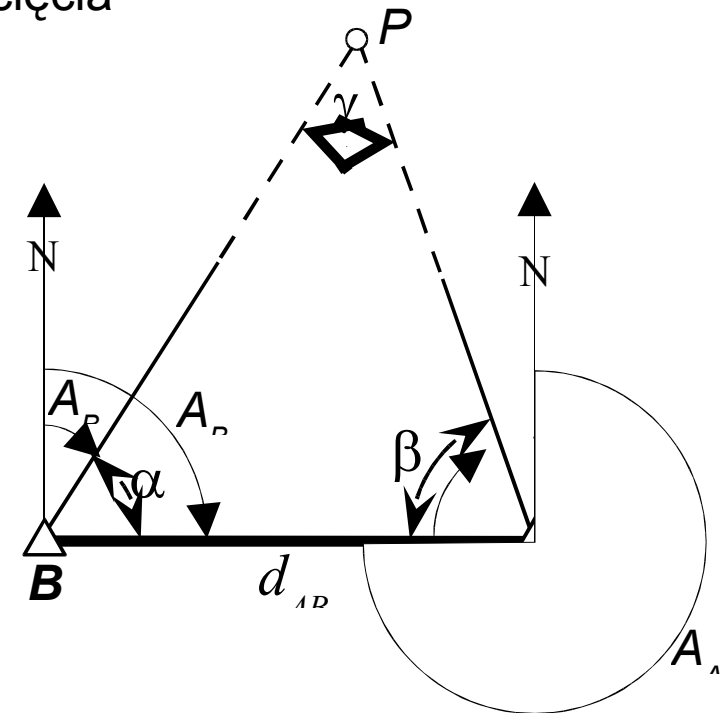
wyrównania osnów poziomych, inwentaryzacja elewacji budowli, pomiary odkształceń i przemieszczeń, określanie punktów pomocniczych podczas prac fotogrametrycznych, topograficznych i innych.

## 9.2. Kątowe wcięcie w przód

### 9.2.1. Konstrukcja wcięcia

Kątowe wcięcie w przód polega na określeniu współrzędnych punktu wcinanego  $P$  (rys. 9.1) na podstawie danych wyjściowych, którymi są: dwa kąty poziome  $\alpha$ ,  $\beta$  pomierzone w trójkącie  $ABP$  na stanowiskach:  $A$ ,  $B$ , będących punktami o znanych współrzędnych  $X$ ,  $Y$ .

Bok  $AB$  stanowi tzw. *bazę wcięcia*, zaś celowe zewnętrzne biegnące od punktów znanych do punktu szukanego są jak wiadomo celowymi (kierunkami) w przód, od których pochodzi nazwa tego wcięcia. Rozwiązanie zadania ma w tym przypadku charakter jednoznaczny, ponieważ w trójkącie  $ABP$  znane są tylko trzy elementy: długość boku  $AB$  –  $d_{AB}$  określona poprzez współrzędne punktów końcowych bazy oraz dwa kąty wierzchołkowe trójkąta:  $\alpha$ ,  $\beta$ .



Rys. 9.1. Kątowe wcięcie w przód

### 9.2.2. Klasyczne rozwiązanie kąтового wcięcia w przód

Kolejność czynności prowadzących do obliczenia współrzędnych punktu wcinanego  $P$  jest następująca:

1. Obliczenie azymutu  $A_{AB}$  i długości  $d_{AB}$  boku  $AB$  ze współrzędnych.
2. Obliczenie azymutów  $A_{AP}$ ,  $A_{BP}$  boków wcinających  $AP$ ,  $BP$ .

Zgodnie z rys. 9.1 azymuty te wynoszą:  $A_{AP} = A_{AB} + \alpha$  oraz  $A_{BP} = A_{BA} - \beta$ .

3. Obliczenie długości  $d_{AP}$ ,  $d_{BP}$  boków wcinających  $AP$ ,  $BP$  na podstawie twierdzenia sinusów:

$$d_{AP} = \frac{d_{AB}}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sin \beta \quad \text{oraz} \quad d_{BP} = \frac{d_{AB}}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sin \alpha$$

4. Obliczenie przyrostów współrzędnych boków wcinających  $AP$ ,  $BP$ :

$$\Delta x_{AP} = d_{AP} \cdot \cos A_{AP} ; \Delta y_{AP} = d_{AP} \cdot \sin A_{AP}$$

oraz

$$\Delta x_{BP} = d_{BP} \cdot \cos A_{BP} ; \Delta y_{BP} = d_{BP} \cdot \sin A_{BP}.$$

5. Dwukrotnie obliczenie współrzędnych punktu  $P$  na podstawie:

a) współrzędnych punktu  $A$  i przyrostów boku  $AP$ :  $X_P = X_A + \Delta x_{AP}$ ;  $Y_P = Y_A + \Delta y_{AP}$

b) współrzędnych punktu  $B$  i przyrostów boku  $BP$ :  $X_P = X_B + \Delta x_{BP}$ ;  $Y_P = Y_B + \Delta y_{BP}$

Pełna zgodność obu par wyników stanowi pierwszą kontrolę rachunkową.

6. Dokonanie drugiej kontroli wyznaczenia współrzędnych punktu  $P$ , polegającej na obliczeniu dwoma sposobami wartości trzeciego kąta  $\gamma$  trójkąta  $ABP$ :
- a) na podstawie obserwacji wyjściowych, jako dopełnienia pomierzonych kątów  $\alpha$ ,  $\beta$  do  $180^\circ$  lub  $200^g$   $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ ,
  - b) na podstawie wyników obliczeń tj. współrzędnych punktu wciętego  $P$  i współrzędnych punktów znanych:  $A$ ,  $B$ .
- Rezultaty obu obliczeń powinny być jednakowe.

### 9.2.3. Obliczenie kąтового wcięcia w przód za pomocą symboli S. Hausbrandta

Opisany wyżej sposób obliczeń, polegający na rozwiązaniu trójkąta  $ABP$ , mimo swej przejrzystości, jest jednak dość pracochłonny ze względu na wieloetapowość rachunku. Zadanie obliczenia wcięcia w przód można rozwiązać znacznie sprawniej, stosując tylko jedną formułę S. Hausbrandta, opartą na jego pomocniczych symbolach rachunkowych:

$$(X_P, Y_P) = \left| \begin{array}{cc|cc} X_A & Y_A & X_B & Y_B \\ -1 & \text{ctg } \beta & +1 & \text{ctg } \alpha \end{array} \right|_{(1,2)} \quad (9.1)$$

Po przekształceniu pomocniczych symboli rachunkowych na zapis algebraiczny otrzymamy:

$$\begin{aligned} X_P &= \frac{X_A \cdot \text{ctg } \beta + Y_A + X_B \cdot \text{ctg } \alpha - Y_B}{\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta} \\ Y_P &= \frac{-X_A + Y_A \cdot \text{ctg } \beta + X_B + Y_B \cdot \text{ctg } \alpha}{\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta} \end{aligned} \quad (9.2)$$

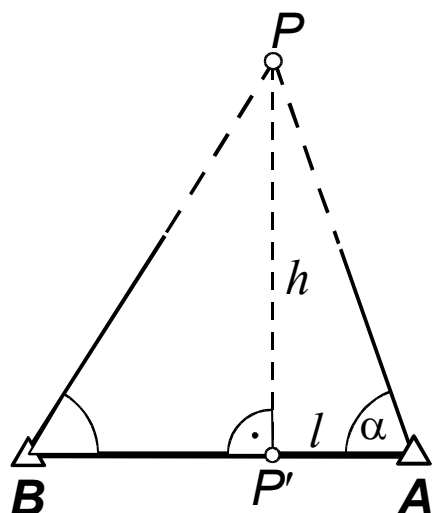
Zestawiając formę wyrażoną wzorem (9.1) należy pamiętać o prawidłowej konfiguracji punktów  $A$ ,  $B$  i kątów  $\alpha$ ,  $\beta$  zgodnej na rys. 9.1, według którego punkt  $A$  i kąt  $\alpha$  znajdują się po prawej stronie bazy i trójkąta wcięcia. Zmiana konfiguracji na odwrotną (punkt  $A$  z lewej strony) zmienia wynik obliczeń, który staje się błędny.

Kontrolę wcięcia przeprowadzamy tak samo jak w ramach poprzedniego sposobu tj. poprzez dwukrotne obliczenie kąta  $\gamma$  (rys. 9.1) z dopełnienia kątów  $\alpha$ ,  $\beta$  do  $180^\circ$  i ze współrzędnych punktów  $A$ ,  $B$ ,  $P$ . Można przy tym wykorzystać wzór na obliczenie kąta ze współrzędnych, który wyrażony za pomocą symboli Hausbrandta i dostosowany do oznaczeń w trójkącie  $ABP$  przyjmuje postać:

$$\operatorname{tg} \gamma = \left| \begin{array}{cc} \Delta x_{PA} & \Delta y_{PA} \\ \Delta x_{PB} & \Delta y_{PB} \end{array} \right|_0 \quad (9.3)$$

Wyprowadzenia wzorów (9.1) i (9.2) można dokonać w oparciu o znane zadanie obliczenia współrzędnych punktu  $P$  na domiarze prostokątnym:

(9.4)



Rys. 9.2. Domiary  
prostokątne punktu  $P$

$$\left. \begin{aligned} X_P &= X_A + l \cdot \cos A_{AB} - h \cdot \sin A_{AB} \\ Y_P &= Y_A + l \cdot \sin A_{AB} + h \cdot \cos A_{AB} \end{aligned} \right\}$$

Na podstawie oznaczeń z rys. 9.2 można napisać:

$$AP' = l = h \cdot \operatorname{ctg} \alpha \quad ; \quad BP' = h \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

a stąd:

$$d_{AB} = AB = AP' + BP' = h \cdot (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta),$$

Współczynniki kierunkowe:  $\cos A_{AB}$ ,  $\sin A_{AB}$  wyniosą:

$$\cos A_{AB} = \frac{X_B - X_A}{h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)} \quad ; \quad \sin A_{AB} = \frac{Y_B - Y_A}{h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)}$$

Po podstawieniu powyższych zależności do wzorów (9.4) otrzymamy:

$$X_P = X_A + h \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{X_B - X_A}{h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)} - h \cdot \frac{Y_B - Y_A}{h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)}$$

$$Y_P = Y_A + h \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{Y_B - Y_A}{h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)} + h \cdot \frac{X_B - X_A}{h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)}$$

Po skróceniu powyższych równań przez  $h$ , sprowadzeniu ich do wspólnego mianownika i redukcji uzyskamy zamieszczone wcześniej wzory (9.2).



#### 9.2.4. Ocena dokładności wcięcia w przód

Ocenę dokładności wcięcia w przód można przeprowadzić dwiema metodami: analityczną (rachunkową) i analityczno-graficzną.

W *metodzie analitycznej* wyznaczamy średni błąd położenia punktu  $m_P$ , który wyraża się wzorem:

$$m_P = \sqrt{m_X^2 + m_Y^2} \quad (9.5)$$

Średnie błędy  $m_X$ ,  $m_Y$  wyznaczenia współrzędnych punktu wcinanego  $P$  wyznaczany jest na podstawie prawa przenoszenia się błędów średnich, co zrealizowaliśmy w ust. 7.4. Średni błąd położenia punktu określonego za pomocą pojedynczego kąтового wcięcia w przód przedstawia wzór (7.20), który po uwzględnieniu oznaczeń z rys. 9.1 przyjmie postać:

$$m_P = \frac{m_\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sqrt{d_{AP}^2 + d_{BP}^2} \quad (9.6)$$

Po wyeliminowaniu z zapisu długości boków wcinających można wyprowadzić inną formę tego wzoru, uwzględniając wielkości wyjściowe zadania:

$$m_P = \frac{d_{AB} \cdot m_\alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta} \quad (9.7)$$

Gdy zachodzi przypadek, gdy trójkąt  $ABP$  jest prostokątny, a więc  $\gamma = \alpha + \beta = 90^\circ$ , otrzymamy znacznie prostszy wzór:

$$m_P = \pm d_{AB} \cdot m_\alpha \quad (9.8)$$

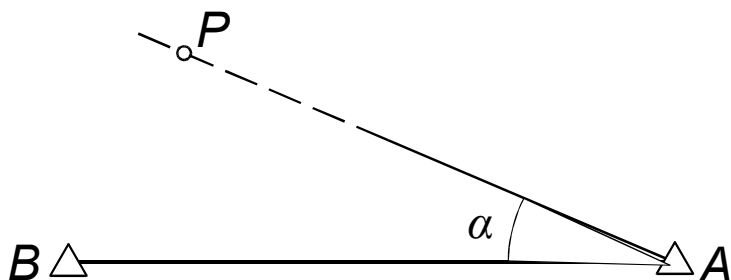
Dla trójkąta równoramiennego po uwzględnieniu:  $\alpha = \beta$  oraz  $d_{AP} = d_{BP}$  wzór na średni błąd położenia punktu wcinanego  $m_P$  przyjmie postać:

$$m_P = \frac{m_\alpha \cdot d_{AB} \sqrt{2}}{4 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \quad (9.9)$$

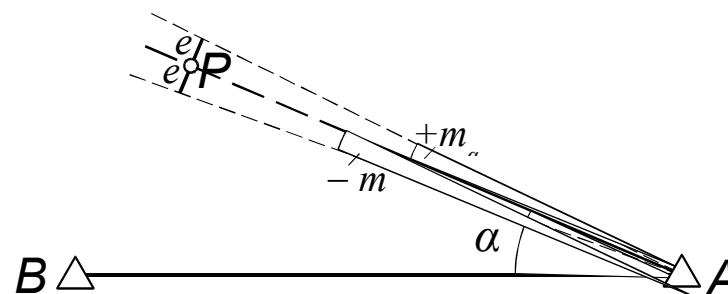
Analiza wzorów (9.6) – (9.9) pozwala na sformułowanie następujących wniosków dotyczących zasad projektowania wcięcia w przód:

- Dokładność wyznaczenia położenia punktu  $P$  zależy od długości bazy  $d_{AB}$  i dokładności pomiaru kątów  $\alpha, \beta$ .
- Na dokładność wcięcia mają wpływ: długości boków wcinających, będących funkcją długości bazy i wartości kątów  $\alpha, \beta$ .
- Najkorzystniejsze jest wcięcie w przód, którego celowe wcinające mają jednakową długość, zaś kąt wcięcia  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$  jest zbliżony do kąta prostego. Z analizy dokładności wynika, że optymalny kąt wcięcia jest nieco większy i wynosi:  $\gamma = 109^\circ 28' (121,63^\circ)$ .
- Trójkąt  $ABP$  powinien być tak zbudowany, aby kąt wcięcia  $\gamma$  zawierał się w przedziale od  $45^\circ$  do  $135^\circ$ .
- Zmiana stosunku długości celowych wcinających  $AP, BP$  względem ilorazu 1:1 wpływa w większym stopniu na pogorszenie wyników wcięcia niż odchylenie kąta  $\gamma$  od  $90^\circ$ , z tego powodu stosunek długości boków wcinających: dłuższego do krótszego nie powinien być większy od 2:1.

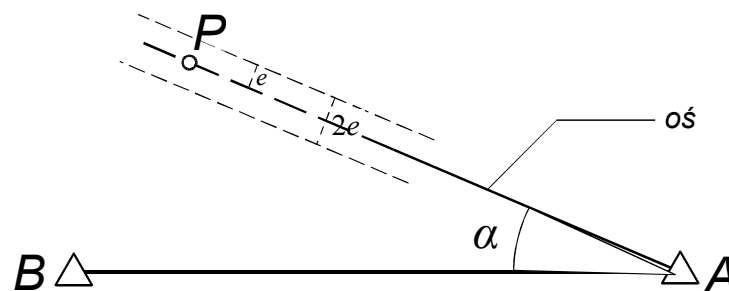
*Metoda analityczno-graficzna* oceny dokładności wybranego wcięcia opiera się na wykreśleniu tzw. *wstęg wahań* oraz *figury błędów* uzyskiwanej w wyniku przecięcia się z sobą co najmniej dwu wstęg. Przy założeniu określonej dokładności pomiaru elementów wyznaczających położenie szukanego punktu  $P$ , wstęga wahań stanowi miejsce geometryczne jego możliwych położzeń. Jeśli na znanym punkcie  $A$  zostanie dokonana obserwacja kątowa  $\alpha$  w celu wyznaczenia pozycji szukanego punktu  $P$ , to przyjmując na razie bezbłądność pomiaru kąta  $\alpha$  zawartego pomiędzy bazą wcięcia w przód a celową wcinającą, miejscem geometrycznym punktów, na którym znajduje się punkt wcinany, jest linia prosta tworząca z bazą  $AB$  pomierzony kąt  $\alpha$  (rys. 9.3).



Rys. 9.3. Kątowy element wyznaczający



Rys. 9.4. Zakres błędu kąta



Rys. 9.5. Wstęga wahań elementu kątowego wcięcia w przód

Obserwacja ta jest jednak obarczona nieznanym błędem prawdziwym  $\varepsilon$ , który z jednakowym prawdopodobieństwem może przyjąć zarówno wartość dodatnią jak i ujemną. Miarą dokładności kąta jest jego średni błąd  $\pm m_\alpha$ , toteż jako miejsce geometryczne punktu  $P$  można uznać obszar zawarty pomiędzy ramionami kąta o rozwartości ramion  $2m_\alpha$ , którego dwusieczna stanowi tzw. *oś wyznaczającą*, zaś jego wierzchołkiem jest znany punkt  $A$  (rys. 9.4). W bliskim otoczeniu punktu  $P$  przyjmujemy, że półproste, stanowiące ramiona kąta  $2m_\alpha$ , biegną równolegle do osi (rys. 9.5). Błąd wynikający z tego założenia jest znikomy, ponieważ dla celowej dłuższej od 20 m odchylenie półprostej od równoległości w otoczeniu punktu  $P$  nie przekracza 1 mm i szybko zmniejsza się wraz ze wzrostem długości celowej. Można więc stwierdzić, że miejscem geometrycznym możliwych położzeń punktu  $P$  jest przestrzeń pomiędzy dwiema prostymi równoległymi wykreślonymi po obu stronach osi wyznaczającej w odległości  $e$ , zwanej *szerokością wstęgi wahań*. Kąt  $m_\alpha$  wyrażony w mierze łukowej będzie wynosił:

$$m_\alpha = \frac{e_\alpha}{d_{AP}} \quad (9.10)$$

stąd szerokość wstęgi wyraża wzór:

$$e_\alpha = d_{AP} \cdot m_\alpha \quad (9.11)$$

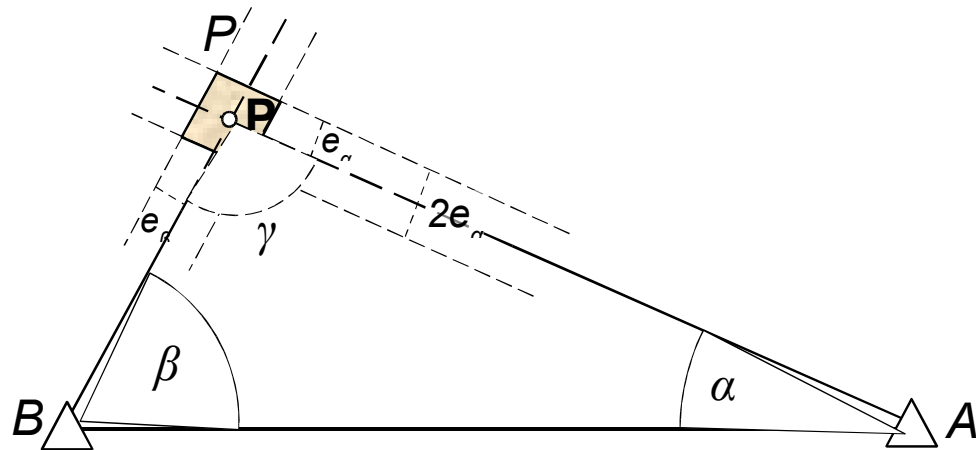
Szerokość wstęgi wahań stanowi liniową miarę dokładności pomiaru kąta. Jak wiadomo do określenia położenia punktu  $P$  w oparciu o bazę  $AB$  należy wykonać co najmniej dwie obserwacje: dwie kątowe (wcięcie w przód), dwie liniowe (wcięcie liniowe) lub jedną kątową a drugą liniową (wcięcie kombinowane). Dla wcięcia kąтового w przód figura błędów w postaci równoległoboku powstaje w wyniku przecięcia się dwu wstęg wahań o szerokościach  $e_\alpha$  i  $e_\beta$  dla kątów:  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 9.6). Wcinany punkt  $P$  znajduje się w przestrzeni mieszczącej się w granicach przecięcia obszarów obydwu wstęg, które utworzą równoległobok o polu  $P_F$  wynoszącym:

$$P_F = 4 \cdot \frac{e_\alpha \cdot e_\beta}{\sin \gamma} \quad (9.12)$$

Po wprowadzeniu do wzoru (9.12) zależności (9.11) oraz przyjęciu jednakowej dokładności pomiaru obydwu kątów otrzymamy wzór na pole figury błędów kąтового wcięcia w przód:

$$P_F = \frac{4d_{AP}d_{BP}}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot m_\alpha^2 \quad (9.13)$$

Wyznaczenie położenia punktu  $P$  będzie najdokładniejsze wówczas, gdy pole  $P_F$  będzie najmniejsze. Nastąpi to w przypadku, gdy  $\sin \gamma$ , czyli  $\sin(\alpha + \beta)$ , osiągnie maksymalną wartość 1, a więc kąt wcięcia  $\gamma$  będzie wtedy równy  $90^\circ$ , lecz jak wspomniano już wcześniej, powinien także być spełniony wymóg zminimalizowania powierzchni trójkąta  $ABP$ . Kompromis obu postulatów występuje dla kąta  $\gamma$  równego  $109,47^\circ$ , o czym była mowa już uprzednio.



Rys. 9.6. Figura błędów kąтового wcięcia w przód

W celu dokonania graficznej analizy dokładności wcięcia należy wykonać rysunek jego konstrukcji w mniejszej skali, dostosowanej do rozmiarów trójkąta *ABP* i arkusza szkicu, np. w skali: 1:1 000, 1:10 000, 1:25 000 lub 1:50 000. Na rysunku tym w otoczeniu punktu wcinanego wykreślamy wstęgi wahań w znacznie większej skali np. 1:1, 1:2, 1:5, 1:10 lub 1:100, odmierzając obliczone wcześniej szerokości wstęg po obu stronach osi wyznaczających.

Wadliwość i zbyt niską dokładność konstrukcji można rozpoznać na podstawie oceny kształtu figury błędów. Najczęstszym tego objawem są nadmiernie szerokie wstęgi lub zbyt ostry kąt ich przecięcia.

Zaletą konstrukcji kąтового wcięcia w przód jest możliwość określenia współrzędnych punktów niedostępnych, lecz widocznych z obu końców bazy. Z uwagi na to, że zadanie to jest jednoznacznie wyznaczalne, a więc nie zapewnia kontroli obserwacji, wskazane jest pomierzenie jakiegoś elementu sprawdzającego np. dodatkowego kąta, boku, wysokości trójkąta, odległości między punktami wcinanymi z sąsiednich wcięć itp.