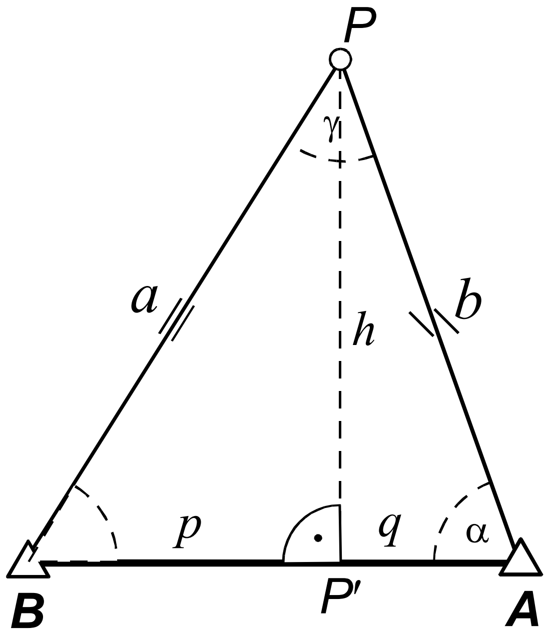
9.4. Wcięcie liniowe

Wcięcie liniowe polega na wyznaczeniu współrzędnych punktu wcinanego P, na podstawie pomiaru odległości pomiędzy punktem P a co najmniej dwoma punktami znanymi. W ramach pojedynczego wcięcia liniowego w trójkącie ABP, w którym punkty znane A, B, wyznaczają bazę wcięcia, mierzymy długości boków: $d_{AP} = b$ i $d_{BP} = a$ (rys. 9.8). Wcięcie to można bez trudu przekształcić na kątowe wcięcie w przód, obliczając kąty wierzchołkowe trójkąta ABP na podstawie twierdzenia Carnota (cosinusów):



Rys. 9.8. Wcięcie liniowe

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \frac{C_a}{2bc} \\ \cos\beta &= \frac{+a^2-b^2+c^2}{2ac} = \frac{C_b}{2ac} \\ \cos\gamma &= \frac{+a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{C_c}{2ab} \end{aligned}\right. \tag{9.17}$$

Wyrażenia C_a, C_b, C_c noszą nazwę *karnotianów*:

$$\left\{\begin{aligned} C_a &= -a^2+b^2+c^2 \\ C_b &= a^2-b^2+c^2 \\ C_c &= a^2+b^2-c^2 \end{aligned}\right. \tag{9.18}$$

Suma karnotianów jest równa sumie kwadratów boków trójkąta, co można wykorzystać do kontroli ich obliczenia:

$$C_a + C_b + C_c = a^2 + b^2 + c^2 \tag{9.19}$$

Kontrolą obliczenia wartości kątów α, β, γ na podstawie wzorów (9.17) jest ich suma, która powinna wynosić dokładnie 180° (200^g).

Po obustronnym pomnożeniu dwóch pierwszych równań (9.17) przez odwrotności sinusów kątów α, β, otrzymamy po lewej stronie ich cotangensy, zaś mianowniki ułamków po prawej stronie obu równań będą równe 4*P* − poczwórnemu polu trójkąta *ABP*, czyli:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{C_a}{4P} \quad ; \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{C_b}{4P} \tag{9.20}$$

Zależności (9.20) wykorzystuje się do wyprowadzenia wzoru (9.22) na obliczenie współrzędnych punktu *P* w oparciu o symbole rachunkowe Hausbrandta.

Innym sposobem rozwiązania wcięcia liniowego jest jego sprowadzenie do zadania polegającego na obliczeniu współrzędnych punktu na domiarze prostokątnym. W tym celu należy określić jako odciętą punktu *P* jeden z odcinków *p* lub *q,* stanowiących rzuty prostokątne boków *a, b* na podstawę *c* oraz wysokość trójkąta *h* jako rzędną tego punktu. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa możemy napisać:

$$h^2 = a^2 - p^2 = b^2 - q^2$$

a stąd:

$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2 = (p-q)\cdot(p+q)\,.$$

Ponieważ:

$$p + q = c\,,$$

a więc:

$$p - q = \frac{a^2 - b^2}{c}$$

Po dodaniu i odjęciu stronami dwóch ostatnich równań na sumę i różnicę odcinków p, q, otrzymamy wzory (9.21), (9.21a) na obliczenie ich długości:

$$p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} = \frac{C_b}{2c} \qquad (9.21) \qquad \text{oraz} \qquad q = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} = \frac{C_a}{2c} \qquad (9.21\text{a})$$

Rzędną punktu P jest wysokość h, która wyniesie:

$$h = \sqrt{a^2 - p^2} = \sqrt{b^2 - q^2}$$

Kolejnym sposobem rozwiązania wcięcia liniowego jest obliczenie współrzędnych X_P, Y_P na podstawie wzoru (9.22) opartego na pomocniczych symbolach rachunkowych Hausbrandta:

$$(X_P, Y_P) = \left| \begin{matrix} X_A & Y_A \\ -4P & C_b \end{matrix} \right| \begin{matrix} X_B & Y_B \\ +4P & C_a \end{matrix} \Bigg|_{(1,2)} \qquad (9.22)$$

Wzór (9.22) zapisany w postaci algebraicznej utworzy dwa równania:

$$X_P = \frac{X_A \cdot C_b + Y_A \cdot 4P + X_B \cdot C_a - Y_B \cdot 4P}{C_a + C_b}$$

$$(9.23)$$

$$Y_P = \frac{-X_A \cdot 4P + Y_A \cdot C_b + X_B \cdot 4P + Y_B \cdot C_a}{C_a + C_b}$$

Jak wiadomo wyraz $4P$ jest poczwórnym polem trójkąta ABP, które obliczymy na podstawie uzyskanych wcześniej wartości karnotianów z następującego wzoru:

$$4P = \sqrt{C_a \cdot C_b + C_a \cdot C_c + C_b \cdot C_c} \tag{9.24}$$

Wzór (9.22) można wyprowadzić, zamieniając wcięcie liniowe w przód na wcięcie kątowe. W tym celu zastępujemy cotangensy ze wzoru (9.1) ilorazami z prawych stron wzorów (9.20) oraz mnożymy przez $4P$ wszystkie wyrazy dolnego wiersza otrzymanej formy rachunkowej złożonej, co nie powoduje zmiany ostatecznego wyniku jej obliczenia.

Ocena dokładności wcięcia liniowego

Ocena dokładności określenia położenia punktu P za pomocą wcięcia liniowego może być wykonana metodami: analityczną (rachunkową) i analityczno-graficzną.

W metodzie analitycznej błędy: m_X , m_Y uzyskuje się po zastosowaniu prawa przenoszenia się błędów średnich w odniesieniu do funkcji podanych w ust. 7.4 lub po ich przekształceniu do postaci:

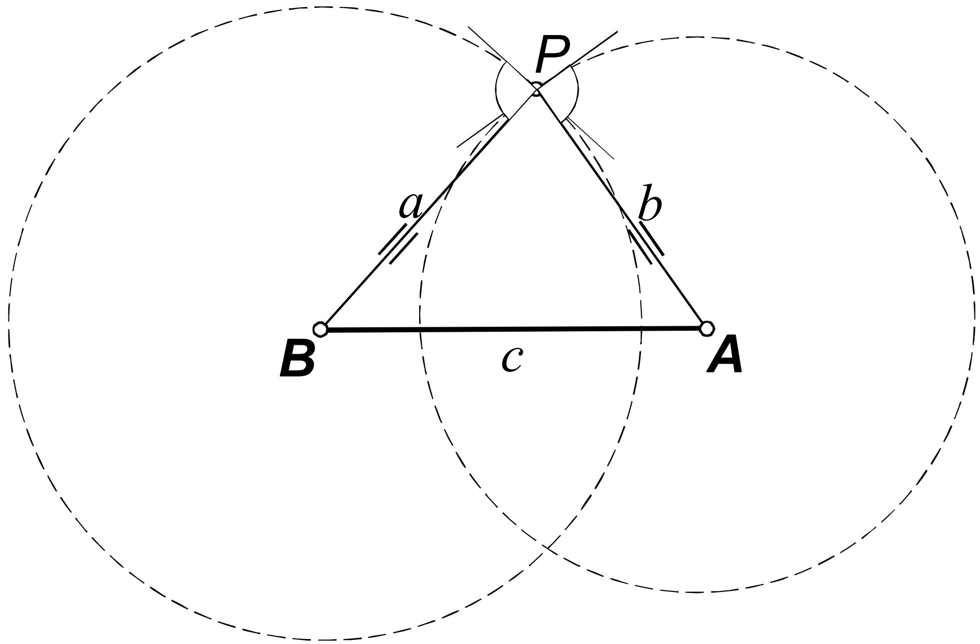
$$X_P = X_A + \frac{1}{2c} \cdot \left[\cos A_{AB} \cdot C_a - \sin A_{AB} \cdot \sqrt{4b^2c^2 - C_a^2} \right] \tag{9.25}$$

$$Y_P = Y_A + \frac{1}{2c} \cdot \left[\sin A_{AB} \cdot C_a + \cos A_{AB} \cdot \sqrt{4b^2c^2 - C_a^2} \right]$$

Średni błąd położenia punktu wcinanego można wyrazić za pomocą wzoru (7.21) lub jego modyfikacji*:

$$m_P = \pm \frac{\sqrt{m_a^2 + m_b^2}}{\sin\gamma} \tag{9.26}$$

Z wzorów (9.25), (9.26) wynika, że dokładność wcięcia liniowego zależy od dokładności pomiaru długości boków wcinających *a, b* oraz wartości kąta γ utworzonego przez te boki. Błąd jest najmniejszy wówczas, gdy wspomniane boki przecinają się pod kątem prostym.



Rys. 9.9. Określenie położenia punktu P wcięciem liniowym

Ocena dokładności wcięcia liniowego *metodą analityczno-graficzną* polega na wykreśleniu wstęg wahań i figury błędów. Dla obserwacji liniowej, jaką jest długość boku wcinającego *a*, miejscem geometrycznym punktów, na którym znajduje się punkt wcinany, jest okrąg o promieniu *a* ze środkiem w punkcie początkowym *A*. W rezultacie wykonania dwóch obserwacji liniowych *a, b* położenie punktu *P* zostaje jednoznacznie określone przez punkt przecięcia się dwóch okręgów o promieniach: *a, b* (rys. 9.9). W bliskim otoczeniu punktu *P* krótkie łuki obu okręgów można zastąpić odcinkami stycznych poprowadzonych w tym punkcie, spełniających funkcje osi wyznaczających. Styczne te z odpowiednimi bokami trójkąta *ABP* tworzą kąty proste.

Pole figury błędu P_F można obliczyć na podstawie wzoru:

$$P_F = \frac{4e_a e_b}{\sin\gamma} \tag{9.27}$$