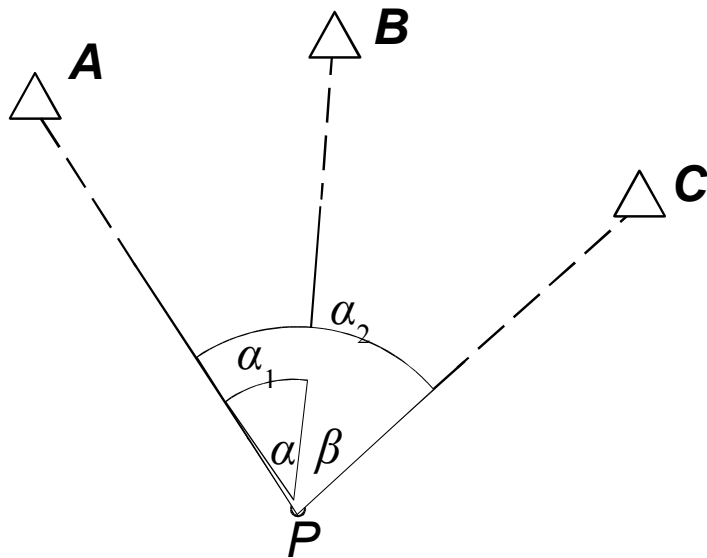


9.6. Wcięcie wstecz



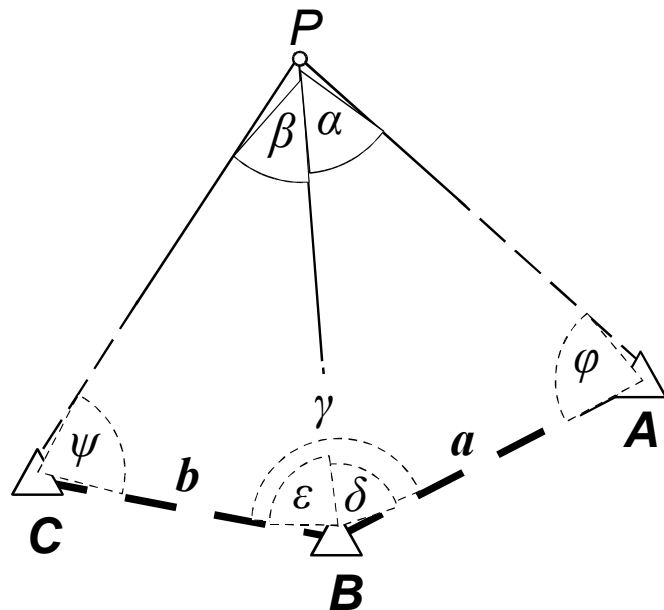
Rys. 9.13. Wcięcie wstecz

Pojedyncze wcięcie wstecz polega na wyznaczeniu współrzędnych punktu wcinanego P na podstawie kątów: α, β (lub α_1, α_2) pomierzonych na stanowisku P do trzech punktów A, B, C o znanych współrzędnych (rys. 9.13). Zadanie to ma tylko jedno rozwiązanie, ponieważ zawiera dwie obserwacje niezbędne do określenia dwu niewiadomych X_P, Y_P ($n=u=2$). Nazwa wcięcia pochodzi od nazw celowych, zwanych *celowymi wewnętrznymi* lub *celowymi wstecz*, które łączą stanowisko pomiarowe, którym jest szukany punkt P , z punktami znanymi.

Dla rozwiązania wcięcia wstecz opracowano bardzo wiele metod rachunkowych i graficznych.

Spośród nich do najbardziej znanych należą sposoby: Sneliusa-Pothenota (Kästnera), Delambre'a, Collinsa, Ansermeta, Cassiniego a także inne, opisane szczegółowo w literaturze geodezyjnej (w tym również własne rozwiązanie autora tego podręcznika).

Rozwiązanie wcięcia wstecz sposobem klasycznym (sposobem Kästnera), znanym także jako *zagadnienie Sneliusa-Pothenota*, polega na znalezieniu kątów pomocniczych: φ, ψ (rys. 9.14) i sprowadzeniu zadania do typowego wcięcia w przód, które dla kontroli



Rys. 9.14. Kąty pomocnicze φ, ψ

można wyliczyć dwukrotnie z obu baz: $AB = a$ oraz $BC = b$.

Znajomość współrzędnych punktów A, B, C pozwala na obliczenie kąta γ (ABC), wyznaczenie długości: $a = AB$, $b = BC$ i azymutów tych boków. Po wprowadzeniu oznaczeń: $\varphi = PBA$ oraz $\psi = PCB$ na podstawie sumy kątów w czworoboku $ABCP$ można napisać:

$$\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi = 360^\circ$$

stąd:
$$\varphi + \psi = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Połowa sumy kątów pomocniczych wyniesie więc:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{1}{2} \cdot [360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)]$$

(9.31)

Celem dalszego postępowania prowadzącego do określenia wartości kątów φ, ψ , jest wyznaczenie połowy różnicy tych kątów.

Na podstawie twierdzenia sinusów w trójkątach ABP i BCP można dwukrotnie zapisać wzory na długość ich wspólnego boku BP , a następnie zrównać ze sobą prawe strony obu równań:

$$\frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \varphi = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \psi$$

Przekształcenie tej równości daje następującą proporcję:

$$\sin \psi : \sin \varphi = (a \cdot \sin \beta) : (b \cdot \sin \alpha)$$

Wyrażenie występujące po prawej stronie powyższego równania jest znaną wielkością, która stanowi tangens pewnego, pomocniczego kąta μ , zaś sposób obliczenia funkcji $\operatorname{tg} \mu$ określa wzór:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a \cdot \sin \beta}{b \cdot \sin \alpha} \quad (9.32)$$

lecz jednocześnie:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}, \quad (9.32a)$$

a więc:

$$\operatorname{tg} (45^\circ - \mu) = \frac{1 - \operatorname{tg} \mu}{1 + \operatorname{tg} \mu} = \frac{1 - \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}}{1 + \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}} = \frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi}$$

Na podstawie znanych wzorów trygonometrycznych na różnicę i sumę sinusów kątów możemy napisać:

$$\sin \varphi - \sin \psi = 2 \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi + \psi}{2}$$

oraz

$$\sin \varphi + \sin \psi = 2 \cos \frac{\varphi - \psi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi + \psi}{2}$$

stąd:

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \mu) = \frac{2 \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi + \psi}{2}}{2 \cos \frac{\varphi - \psi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi + \psi}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2}}$$

Po prostym przekształceniu zapiszemy równanie na obliczenie tangensa połowy różnicy kątów pomocniczych φ, ψ :

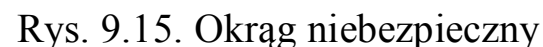
$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \operatorname{tg} (45^\circ - \mu) \quad (9.33)$$

Na podstawie wartości połowy sumy i połowy różnicy kątów φ, ψ możemy teraz wyznaczyć oba poszukiwane kąty pomocnicze:

$$\varphi = \frac{\varphi + \psi}{2} + \frac{\varphi - \psi}{2} \quad (9.34)$$

$$\psi = \frac{\varphi + \psi}{2} - \frac{\varphi - \psi}{2} \quad (9.35)$$

Wcięcie wstecz jest konstrukcją niewyznaczalną w przypadku, gdy na okręgu opisującym trójkąt utworzony przez punkty znane: A, B, C , zwanym *okręgiem niebezpiecznym*, znajduje się także wcinany punkt P . Jak wynika z rysunku 9.15 istnieje nieograniczona liczba punktów: $P, P', P'', \dots P^n$, położonych na łuku ponad cięciwą AC , z których odcinki AB, BC widać pod tymi samymi kątami α, β , a więc dla ustalonych danych wyjściowych istnieje nieskończenie wiele rozwiązań. Jeśli punkt P znajduje się blisko okręgu niebezpiecznego, wynik obliczenia wcięcia wstecz jest bardzo niedokładny, toteż stosując tę konstrukcję należy sprawdzić graficznie lub rachunkowo, czy nie zachodzi taki przypadek. Nwcinany znajduje się wewnątrz trójkąta ABC utworz



Rys. 9.15. Okrąg niebezpieczny

pobliżu środka okręgu niebezpiecznego. Nierozwiązalność wcięcia wstecz, występująca w przypadku, gdy punkty: A, B, C, P znajdują się na tym samym okręgu, wynika również z podanego niżej rozumowania:

Z rys. 9.15 widzimy, że w opisywanej sytuacji kątami trójkąta ABC utworzonego przez punkty znane, są pomierzone kąty α i β , natomiast trzeci kąt γ tego trójkąta możemy łatwo obliczyć ze współrzędnych punktów A, B, C , a więc:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Jednocześnie z sumy kątów czworokąta $ABCP$ wynika związek:

$$\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi = 360^\circ$$

a zatem:

$$\varphi + \psi = 180^\circ \text{ lub } \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 90^\circ$$

czyli

$$\sin \varphi = \sin (180^\circ - \psi) = \sin \psi$$

Zgodnie z wzorem (9.32a) tangens pomocniczego kąta μ , równy ilorazowi sinusów $\sin \varphi : \sin \psi$, będzie w tym przypadku równy jedności, a stąd $\mu = 45^\circ$. W tej sytuacji prawa strona wzoru (9.33) stanie się symbolem nieoznaczonym, ponieważ:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \operatorname{tg} (45^\circ - \mu) = \operatorname{tg} 90^\circ \cdot \operatorname{tg} 0 = +\infty \cdot 0$$

Gdy punkt P znajduje się w pobliżu okręgu niebezpiecznego, wtedy suma połowy kątów pomocniczych φ, ψ jest bliska 90° , więc określenie wartości $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$ jest bardzo niedokładne.

Spośród wielu rozwiązań pojedynczego wcięcia wstecz najczęściej w praktyce stosowany jest się wygodny i szybki sposób oparty na wzorach *Hausbrandta*, który wykorzystując znane symbole zmodyfikował metodę *Delambre'a*. Rachunek rozpoczyna się od obliczenia przyrostów współrzędnych na bokach utworzonych przez punkty znane: Δx_{AB} , Δy_{AB} , Δx_{AC} , Δy_{AC} oraz cotangensów kątów: α_1 , α_2 (rys. 9.13). Wartości te wstawiamy do wzoru (9.36). Jego zasadniczym elementem jest forma rachunkowa złożona F , składa się z dwóch form rachunkowych prostych: f , g .

$$F \equiv |f|g| \equiv \left| \begin{array}{cc} \Delta x_{AB} & \Delta y_{AB} \\ + \operatorname{ctg} \alpha_1 & +1 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} \Delta x_{AC} & \Delta y_{AC} \\ - \operatorname{ctg} \alpha_2 & -1 \end{array} \right| \quad (9.36)$$

Z formy F obliczamy wartości następujących funkcji: f_1 , f_2 , F_1 , F_2 oraz $F_0 = \frac{F_1}{F_2}$.

Następnie zestawiamy kolejną formę rachunkową: $\varphi \equiv \left| \begin{array}{cc} f_1 & f_2 \\ F_0 & +1 \end{array} \right|$ i obliczamy z niej

wartość funkcji względnej kwadratowej $\varphi_{[1]}$, równą przyrostowi Δx_{AP} .

$$\Delta x_{AP} = \varphi_{[1]} = \left| \begin{array}{cc} f_1 & f_2 \\ F_0 & +1 \end{array} \right|_{[1]} \quad (9.37)$$

Drugi przyrost boku AP tj. Δy_{AP} obliczymy według zależności:

$$\Delta y_{AP} = -F_0 \cdot \Delta x_{AP} \quad (9.38)$$

Wyznaczenie przyrostów Δx_{AP} , Δy_{AP} pozwala na obliczenie współrzędnych punktu P :

$$X_P = X_A + \Delta x_{AP} ; \quad Y_P = Y_A + \Delta y_{AP}$$

Kontrolę rachunku stanowi obliczenie ze współrzędnych co najmniej jednego z kątów: α_1, α_2 lub $BPC = \beta$ (rys. 9.13).

Uzasadnienie zaproponowanego przez S. Hausbrandta sposobu obliczania wcięcia wstecz jest następujące:

Przyrosty współrzędnych boku PB : $\Delta x_{PB}, \Delta y_{PB}$ można zapisać w postaci sum:

$$\Delta x_{PB} = \Delta x_{PA} + \Delta x_{AB} \quad \text{oraz} \quad \Delta y_{PB} = \Delta y_{PA} + \Delta y_{AB}$$

Po wprowadzeniu powyższych zależności do wzorów na obliczenie kątów α_1 i α_2 ze współrzędnych otrzymamy równania wyrażające tangensy kątów: α_1, α_2 , które następnie pomnożymy obustronnie przez cotangensy tych kątów:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \left| \begin{array}{cc} \Delta x_{PA} & \Delta y_{PA} \\ (\Delta x_{PA} + \Delta x_{AB}) & (\Delta y_{PA} + \Delta y_{AB}) \end{array} \right|_0 = \frac{\Delta x_{PA} \cdot \Delta y_{AB} - \Delta y_{PA} \cdot \Delta x_{AB}}{\Delta x_{PA}^2 + \Delta y_{PA}^2 + \Delta x_{PA} \cdot \Delta x_{AB} + \Delta y_{PA} \cdot \Delta y_{AB}} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \left| \begin{array}{cc} \Delta x_{PA} & \Delta y_{PA} \\ (\Delta x_{PA} + \Delta x_{AC}) & (\Delta y_{PA} + \Delta y_{AC}) \end{array} \right|_0 = \frac{\Delta x_{PA} \cdot \Delta y_{AC} - \Delta y_{PA} \cdot \Delta x_{AC}}{\Delta x_{PA}^2 + \Delta y_{PA}^2 + \Delta x_{PA} \cdot \Delta x_{AC} + \Delta y_{PA} \cdot \Delta y_{AC}} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_2$$

Po uwzględnieniu, że $\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1 = 1$ oraz dokonaniu odpowiednich przekształceń i redukcji, otrzymamy:

$$\Delta x_{PA}^2 + \Delta y_{PA}^2 + \Delta x_{PA} \cdot \Delta x_{AB} + \Delta x_{PA} \cdot \Delta y_{AB} = (\Delta x_{PA} \cdot \Delta y_{AB} - \Delta y_{PA} \cdot \Delta x_{AB}) \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1$$

$$\Delta x_{PA}^2 + \Delta y_{PA}^2 + \Delta x_{PA} \cdot \Delta x_{AC} + \Delta x_{PA} \cdot \Delta y_{AC} = (\Delta x_{PA} \cdot \Delta y_{AC} - \Delta y_{PA} \cdot \Delta x_{AC}) \cdot \operatorname{ctg} \alpha_2$$

Następnie przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę i porządkujemy zapis otrzymując:

$$\Delta x_{PA}^2 + \Delta y_{PA}^2 + \Delta x_{PA} (\Delta x_{AB} - \Delta y_{AB} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1) + \Delta y_{PA} (\Delta y_{AB} + \Delta x_{AB} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1) = 0$$

$$\Delta x_{PA}^2 + \Delta y_{PA}^2 + \Delta x_{PA} (\Delta x_{AC} - \Delta y_{AC} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_2) + \Delta y_{PA} (\Delta y_{AC} + \Delta x_{AC} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_2) = 0$$

Jeśli do powyższych równań wprowadzimy wzory na funkcje podanych wcześniej form rachunkowych: f_1, f_2, g_1, g_2 , to para powyższych równań przybierze prostszą postać:

$$\begin{aligned} \Delta x_{PA}^2 + \Delta y_{PA}^2 + f_1 \cdot \Delta x_{PA} + f_2 \cdot \Delta y_{PA} &= 0 \\ \Delta x_{PA}^2 + \Delta y_{PA}^2 - g_1 \cdot \Delta x_{PA} - g_2 \cdot \Delta y_{PA} &= 0 \end{aligned} \quad (9.39a)$$

Po odjęciu powyższych równań stronami otrzymamy:

$$(f_1 + g_1) \cdot \Delta x_{PA} + (f_2 + g_2) \cdot \Delta y_{PA} = 0, \text{ a ponieważ } f_1 + g_1 = F_1; f_2 + g_2 = F_2 \text{ oraz } \frac{F_1}{F_2} = F_0,$$

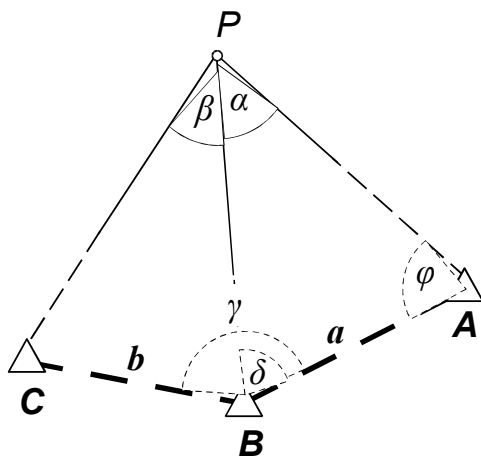
stąd: $\operatorname{tg} A_{PA} = \frac{\Delta y_{PA}}{\Delta x_{PA}} = -F_0$, co po przekształceniu daje wzór (9.38).

Widoczne jest również, że:

$$-F_0 = \operatorname{tg} A_{AP} = \frac{f_1 + g_1}{f_2 + g_2} = \left| \begin{array}{cc} \Delta x_{AB} & \Delta y_{AB} \\ + \operatorname{ctg} \alpha_1 & +1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \Delta x_{AC} & \Delta y_{AC} \\ - \operatorname{ctg} \alpha_2 & -1 \end{array} \right|_0$$

co w zapisie algebraicznym daje równość:

$$-\operatorname{tg} A_{PA} = \frac{\Delta x_{AB} - \Delta y_{AB} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1 - \Delta x_{AC} + \Delta y_{AC} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_2}{\Delta x_{AB} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1 + \Delta y_{AB} - \Delta x_{AC} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_2 - \Delta y_{AC}} \quad (9.39)$$



Rys. 9.16. Kąty pomocnicze

Znajomość współrzędnych punktów A , B , C pozwala na obliczenie na ich podstawie kąta γ ($\angle CBA$) oraz wyznaczenie długości $a = BC$, $b = AB$.

Po wprowadzeniu oznaczenia: $\delta = \angle BPA$ oraz formuły na pomocniczy kąt κ

$$\kappa = \gamma + \beta, \quad (9.40)$$

i po zastosowaniu twierdzenia sinusów można napisać:

$$\frac{\sin(\alpha + \delta)}{BP} = \frac{\sin \alpha}{a} \quad \text{oraz} \quad \frac{\sin(\kappa - \delta)}{BP} = \frac{\sin \beta}{b}$$

W wyniku podzielenia powyższych równań stronami, otrzymamy:

$$\frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\kappa - \delta)} = \frac{\sin \alpha \cdot b}{\sin \beta \cdot a} \quad (9.41)$$

Wyrażenie ułamkowe stanowiące prawą stronę powyższego równania jest znaną wielkością, którą oznaczymy symbolem K , zaś sposób jej obliczenia wyraża wzór (9.41 a):

$$K = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a \cdot \sin \beta} \quad (9.41 \text{ a})$$

Wyrażenie po lewej stronie równania (9.41) w wyniku zastosowania wzorów na sinus sumy i różnicy kątów oraz po podzieleniu licznika i mianownika przez $\cos \delta$ przyjmie postać:

$$K = \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\kappa - \delta)} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \delta}{\sin \kappa - \cos \kappa \cdot \operatorname{tg} \delta} ,$$

która pozwoli na wartości $\operatorname{tg} \delta$:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{K \cdot \sin \kappa - \sin \alpha}{K \cdot \cos \kappa + \cos \alpha} \quad (9.42)$$

Znając $\operatorname{tg} \delta$, a następnie kąt δ , obliczymy współrzędne punktu P w oparciu o wcięcie w przód:

I obliczenie: $A_{BP} = A_{BA} - \delta$; $d_{BP} = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin(\alpha + \delta)$;

$$X_P = X_B + d_{BP} \cdot \cos A_{BP} ; Y_P = Y_B + d_{BP} \cdot \sin A_{BP}.$$

II obliczenie: $A_{AP} = A_{BA} - (\alpha + \delta)$; $d_{AP} = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \delta$;

$$X_P = X_A + d_{AP} \cdot \cos A_{AP} ; Y_P = Y_A + d_{AP} \cdot \sin A_{AP}.$$

Kontrola obliczenia współrzędnych punktu P polega na obliczeniu ze współrzędnych co najmniej jednego danego kąta np. APB , BPC , lub APC .

Nierozwiązalność wcięcia wstecz, gdy punkty: A, B, C, P znajdują się na tym samym okręgu, wynika w podanym wyżej sposobie z następujących rozważań:

Z sumy kątów trójkąta ABC (rys. 9.15) wynika, że: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, a ponieważ z założenia $\beta + \gamma = \kappa$, a więc: $\kappa = 180^\circ - \alpha$.

Wyrażenie K z wzoru (9.41) będzie równe jedności:

$$K = \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\kappa - \delta)} = \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin[180^\circ - (\alpha + \delta)]} = 1,$$

w związku z czym $\operatorname{tg} \delta$ określony na podstawie wzoru (9.42) wyniesie:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sin \kappa - \sin \alpha}{\cos \kappa + \cos \alpha}.$$

Ocena dokładności wcięcia wstecz

Metoda analityczna oceny dokładności wcięcia wstecz opiera się o związki funkcyjne pomiędzy szukanymi współrzędnymi X_P , Y_P punktu wcinanego a obserwacjami kątowymi α , β , które zapisać jako różnice azymutów ramion danego kąta:

$$\alpha = A_{PB} - A_{PA} \quad \beta = A_{PC} - A_{PB}$$

a stąd

$$\alpha = \arctg \frac{Y_B - Y_P}{X_B - X_P} - \arctg \frac{Y_A - Y_P}{X_A - X_P}$$

oraz

$$\beta = \arctg \frac{Y_C - Y_P}{X_C - X_P} - \arctg \frac{Y_B - Y_P}{X_B - X_P}$$

(9.43)

Zróżniczkowanie powyższych wzorów pozwala uzyskać dwa równania wyrażające związki pomiędzy różniczkami kątów $d\alpha$, $d\beta$ a różniczkami niewiadomych dX_P , dY_P . Po rozwiązaniu układu dwóch równań o dwóch niewiadomych: dX_P , dY_P oraz zastąpieniu różniczek błędami średnimi, a ponadto zakładając jednakową dokładność obydwu kątów, otrzymamy wzór (9.44), w którym występują tzw. *współczynniki kierunkowe* obliczane dla boku ij na podstawie wzorów:

$$a_{ij} = \frac{\Delta x_{ij}}{d_{ij}^2} = \frac{\Delta x_{ij}}{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2} = \frac{\cos A_{ij}}{d_{ij}}$$

(9.44)

$$b_{ij} = \frac{\Delta y_{ij}}{d_{ij}^2} = \frac{\Delta y_{ij}}{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2} = \frac{\sin A_{ij}}{d_{ij}}$$

oraz wyznacznik D obliczany w oparciu o współczynniki kierunkowe:

$$D = \begin{vmatrix} b_{PB} - b_{PA} & -(a_{PB} - a_{PA}) \\ b_{PC} - b_{PB} & -(a_{PC} - a_{PB}) \end{vmatrix}$$

(9.45)

W oparciu o podane wyżej wielkości można zapisać wzór na średni błąd położenia punktu wciętego wstecz jako:

$$m_P = \pm \frac{m_\alpha}{|D|} \cdot \sqrt{(a_{PC} - a_{PB})^2 + (b_{PC} - b_{PB})^2 + (a_{PB} - a_{PA})^2 + (b_{PB} - b_{PA})^2} \quad (9.46)$$

Błędy średnie kątów są z reguły wyrażane w mierze stopniowej (") lub gradowej (°), toteż współczynniki kierunkowe obliczone ze wzorów (9.44) należy wówczas pomnożyć przez odpowiedni zamiennik miary łukowej ρ ($\rho''=206\,265''$ lub $\rho^\circ=636\,620^\circ$).

Metoda analityczno-graficzna oceny dokładności wcięcia wstecz opiera się na obliczaniu szerokości wstęp wahań za pomocą wzoru (9.29) oraz pola figury błędów powstałej w wyniku ich przecięcia. Przyjmując oznaczenia podane na rys. 9.16 szerokości wstęp wahań dla kątów α i β zapiszemy jako:

$$e_\alpha = \frac{d_{AP} \cdot d_{BP}}{a} \cdot m_\alpha \quad \text{oraz} \quad e_\beta = \frac{d_{BP} \cdot d_{CP}}{b} \cdot m_\alpha \quad (9.47)$$

Pole równoległoboku błędów wyniesie natomiast:

$$P_F = \frac{4 \cdot e_\alpha \cdot e_\beta}{\sin \Theta} \quad (9.48)$$

iloraz długości skrajnych boków wcinających: $d_{AP} : d_{CP} = k$. Miejscem geometrycznym punktów spełniającym warunek stałości stosunku długości boków $AP:CP$ jest tzw. *okrąg Apoloniusza* o promieniu r , którego długość można obliczyć ze wzoru:

$$r = \frac{k \cdot d_{AC}}{k^2 - 1} \quad (9.49)$$

W lewoskrętnym układzie współrzędnych prostokątnych o początku w punkcie stałym A i osi Oy skierowanej wzdłuż prostej AC współrzędne środka tego okręgu

wyniosą:

$$x = 0 \quad ; \quad y = \frac{k \cdot d_{AC}}{k^2 - 1}$$

Z kolei warunek pierwszy spełnią te punkty P , z których odcinek AC jest widoczny pod kątem $\alpha + \beta = 270^\circ - \gamma$, a więc ich miejscem geometrycznym jest inny okrąg o cięciwie AC i jej kącie środkowym $2(\alpha + \beta)$. Wynika to ze znanego twierdzenia, że kąt wpisany w okrąg jest równy połowie kąta środkowego opartego na tej samej cięciwie. Konstrukcja okręgu Apoloniusza i znalezienie położenia jego środka obejmuje następujące czynności graficzne:

- wystawienie prostopadłych do odcinka AC na jego końcach,
- odłożenie od obu prostopadłych jednakowych kątów $(\alpha + \beta)$ i wykreślenie ich ramion,
- zaznaczenie środka okręgu O_I w punkcie przecięcia się ramion i wykreślenie go poprzez opisanie cięciwy AC .

Dla wcięcia wstecz wykonanego z punktu przecięcia obu okręgów figura błędów jest kwadratem, zaś pole tej figury osiąga minimum w stosunku do innych możliwych położań punktu P . Najkorzystniejszy przypadek wcięcia wstecz występuje wtedy, gdy punkty dane tworzą trójkąt równoboczny, zaś punkt szukany znajduje się w środku jego ciężkości. Długości celowych d są wtedy jednakowe. Do wstępnych i przybliżonych analiz dokładności można wykorzystywać wzór:

$$m_{P \text{ [cm]}} = \pm 0,14 \cdot m_{\alpha}^{[cc]} \cdot d_{[km]}^* \quad (9.50)$$