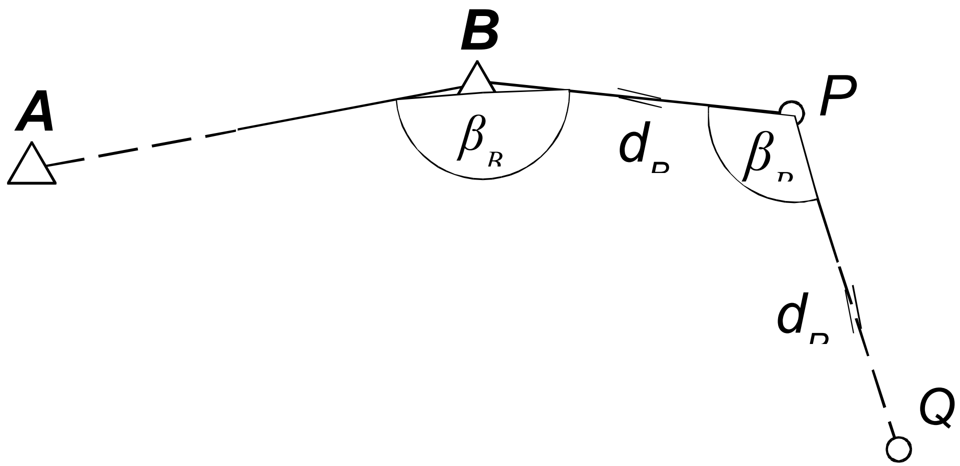
9.7. Zadanie Hansena



Rys. 9.17. Wyznaczenie położenia dwóch punktów ciągiem wiszącym

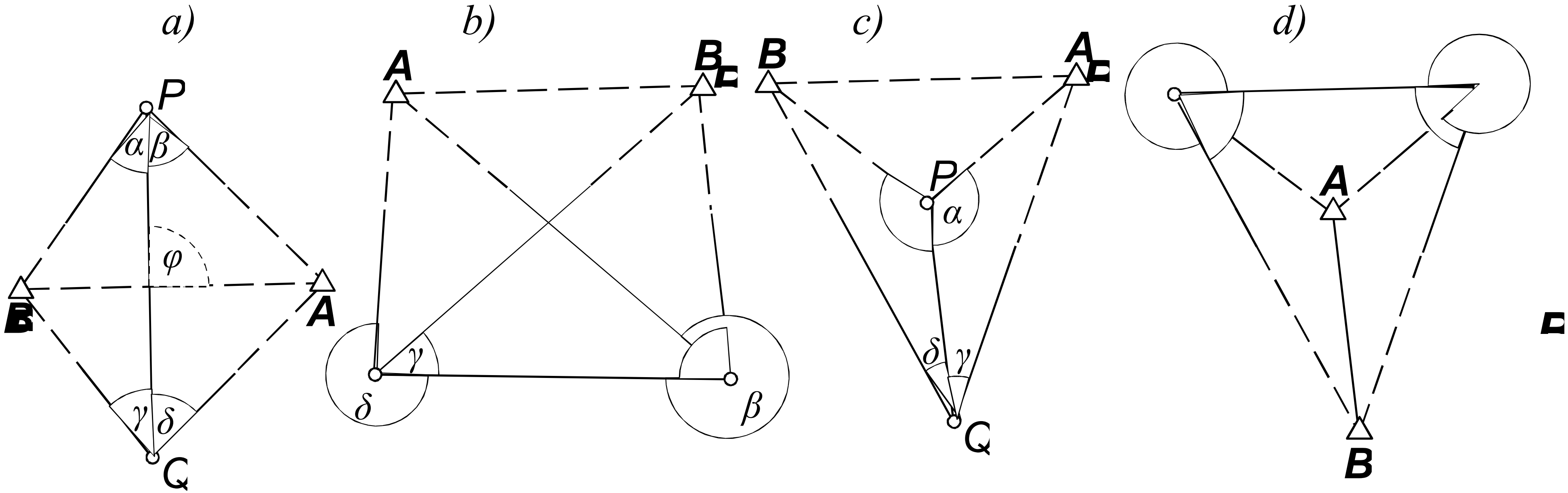
Do równoczesnego wyznaczenia współrzędnych dwóch lub większej liczby punktów powinno się stosować sieci nawiązane, podlegające wyrównaniu, a więc zawierające spostrzeżenia nadliczbowe. W ramach osnowy pomiarowej zakładanej podczas zdjęć szczegółów, w trudnych warunkach terenowych, dopuszcza się określenie położenia punktów za pomocą konstrukcji jednoznacznie wyznaczalnych, które nie zapewniają jednak kontroli poprawności wyników pomiarów i z tego powodu powinny być stosowane wyjątkowo. Zgodnie z instrukcją G-4 (§ 26) konieczne jest przy tym przestrzeganie wymogu dużej staranności obserwacji oraz pomiaru przynajmniej jednego elementu sprawdzającego. Typowym zastosowaniem tego rodzaju zadań może być także obliczanie współrzędnych przybliżonych potrzebnych do wyrównania sieci poziomych metodą spostrzeżeń pośredniczących.

W dotychczasowej praktyce geodezyjnej najczęściej stosowaną konstrukcją, nie zawierającą obserwacji nadliczbowych, służącą do wyznaczenia położenia dwóch punktów, jest ciąg poligonowy wiszący (rys. 9.17). Do nawiązania tego ciągu potrzebne są dwa punkty stałe (*A, B*), zaś wielkościami mierzonymi są: kąty prawe lub lewe oraz długości boków.

W myśl obowiązujących przepisów nie może on posiadać więcej niż dwa boki (G-4 § 20, punkt 1 b). Prawdopodobnie w przyszłości stosowanie ciągów wiszących jako osnowy pomiarowej nie będzie w ogóle dozwolone.

Obliczenie ciągu wiszącego, oparte na przeliczeniu kątów i długości na przyrosty współrzędnych, przebiega według sposobu postępowania znanego z przybliżonego wyrównania ciągu otwartego, nawiązanego obustronnie, jednak wskutek braku spostrzeżeń nadliczbowych nie występują tu żadne odchyłki.

Zadanie Hansena polega na równoczesnym wyznaczeniu współrzędnych dwóch punktów szukanych *P, Q* na podstawie wykonania na nich pomiarów kątowych α, β, (na stanowisku *P*) oraz γ, δ (na stanowisku *Q*) do dwóch punktów znanych *A, B*. Ponieważ kąty poziome mierzy się wyłącznie na punktach wcinanych, toteż zadanie Hansena jest często określane jako *dwustanowiskowe wcięcie wstecz.* W ramach tego zadania mogą wystąpić różne przypadki wzajemnej konfiguracji punktów danych i szukanych pokazane na rysunkach 9.18 a, b, c, d.



Rys. 9.18. Przypadki konfiguracji punktów znanych i wyznaczanych w zadaniu Hansena

Rozwiązanie zadania Hansena za pomocą symboli rachunkowych S. Hausbrandta

W celu ujednolicenia przebiegu obliczeń i dostosowania go do wszystkich zilustrowanych wyżej przypadków zadania Hansena, ustalono jednakowe zasady określania kątów: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, stanowiących dane wyjściowe do procesu obliczeniowego:

- kąt α jest kątem prawoskrętnym liczonym od kierunku PQ do kierunku PB,
- kąt β jest kątem prawoskrętnym liczonym od kierunku PA do kierunku PQ,
- kąt γ jest kątem prawoskrętnym liczonym od kierunku QB do kierunku QP,
- kąt δ jest kątem prawoskrętnym liczonym od kierunku QP do kierunku QA.

Zastosowanie powyższych zasad umożliwia ustalenie właściwego zakresu kątów $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pokazanych na rysunkach 9.18 a, b, c, d.

Tok rachunku zadania Hansena składa się z następujących etapów:

1. Wyznaczenie dostosowanych do określonego przypadku zadania wartości kątów $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ na podstawie kątów pomierzonych,

2. Obliczenie cotangensów kątów $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
3. Obliczenie tangensa kąta pomocniczego φ zawartego pomiędzy bokami AB i PQ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta}{\left|\begin{matrix} \operatorname{ctg}\alpha & \operatorname{ctg}\beta \\ \operatorname{ctg}\gamma & \operatorname{ctg}\delta \end{matrix}\right|_1} \tag{9.51}$$

4. Zestawienie form prostych i obliczenie wartości ich funkcji zerowych: A_0, B_0, C_0, D_0:

$$A_0 = \left|\begin{matrix} -\operatorname{tg}\varphi & +1 \\ \operatorname{ctg}\alpha & +1 \end{matrix}\right|_0 ;\; B_0 = \left|\begin{matrix} +\operatorname{tg}\varphi & +1 \\ \operatorname{ctg}\beta & +1 \end{matrix}\right|_0 ;\; C_0 = \left|\begin{matrix} +\operatorname{tg}\varphi & +1 \\ \operatorname{ctg}\gamma & +1 \end{matrix}\right|_0 ; D_0 = \left|\begin{matrix} -\operatorname{tg}\varphi & +1 \\ \operatorname{ctg}\delta & +1 \end{matrix}\right|_0 \tag{9.52}$$

5. Zestawienie form rachunkowych złożonych F, Φ i obliczenie ich funkcji względnych, prostych (1), (2) wyrażających współrzędne punktów szukanych P, Q:

$$(X_P, Y_P) = F_{(1,2)} = \left|\begin{matrix} X_A & Y_A \\ -1 & A_0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} X_B & Y_B \\ +1 & B_0 \end{matrix}\Bigg|_{(1,2)} \tag{9.53}$$

$$(X_Q, Y_Q) = \Phi_{(1,2)} = \left|\begin{matrix} X_A & Y_A \\ +1 & C_0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} X_B & Y_B \\ -1 & D_0 \end{matrix}\Bigg|_{(1,2)} \tag{9.54}$$

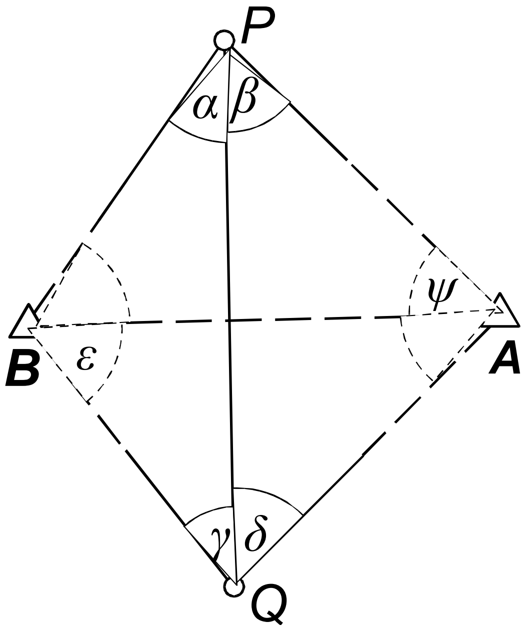
Dla uniknięcia omyłek przy zestawianiu tych form należy zwracać uwagę, czy jednakowe znaki przy jedynce i tangensie kąta φ występują jednocześnie w tych samych formach składowych wzorów (9.52) oraz (9.53), (9.54)

6. Wykonanie obliczenia kontrolnego poprzez ponowne wyznaczenie ze wzoru (9.55) wartości tangensa kąta φ uzyskanego wcześniej z zależności (9.51):

$$\mathrm{tg}\varphi = \begin{vmatrix} \Delta x_{PQ} & \Delta y_{PQ} \\ \Delta x_{AB} & \Delta y_{AB} \end{vmatrix}_0 \tag{9.55}$$

7. Przeprowadzenie kontroli ostatecznej, polegającej na obliczeniu ze współrzędnych co najmniej dwóch pomierzonych kątów np. *APB* oraz *AQB* i uzyskaniu zgodności kątów kontrolnych z kątami wyjściowymi.

Rozwiązanie zadania Hansena za pomocą kątów pomocniczych φ i ψ



Rys. 9.19.Kąty pomocnicze φ, ψ

Sposób ten przypomina analogiczne rozwiązanie stosowane wcześniej dla wcięcia wstecz. Położenie pomocniczych kątów φ, ψ zostało pokazane na rys. 9.19, z którego wynika, że oznaczenie φ odnosi się obecnie do innego kąta niż przy sposobie Hausbrandta.

Na podstawie sumy kątów w trójkącie *ABP* dla przypadku z rys. 9.18a można napisać:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{180° - (\alpha + \beta)}{2} \tag{9.56}$$

Dla przypadku z rys. 9.18 b analogiczna zależność przyjmie postać:

$$\frac{\varphi+\psi}{2}=\frac{180^\circ-(\alpha+\beta)}{2}+180^\circ \tag{9.57}$$

Po wprowadzeniu pomocniczego kąta μ i zastosowaniu twierdzenia sinusów w trójkątach *ABP* i *ABQ* uzyskujemy wzory:

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\sin\gamma\cdot\sin(\beta+\delta)}{\sin\delta\cdot\sin(\alpha+\gamma)} \tag{9.58}$$

Konstrukcja zadania spełnia też znany z wcięcia wstecz związek (9.33):

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot\operatorname{tg}(45^\circ-\mu)$$

Po obliczeniu wartości kątów pomocniczych φ, ψ wg wzorów (9.34) i (9.35) można określić współrzędne punktu P za pomocą wcięcia w przód w trójkącie ABP. Współrzędne punktu Q obliczymy podobnie z wcięcia w przód w trójkącie ABQ po wcześniejszym wyliczeniu kątów: ε, κ (rys. 9.19), które wyniosą:

- dla przypadku *a* (rys. 9.18a):

$$\varepsilon = 180° - (\alpha + \gamma + \varphi) \text{ oraz } \kappa = 180° - (\beta + \delta + \psi), \tag{9.59}$$

- dla przypadku *b* (rys. 9.18b):

$$\varepsilon = \alpha + \gamma + \varphi - 180° \quad \text{oraz} \quad \kappa = \beta + \delta + \psi - 540° \tag{9.59a}$$

Zadanie Hansena jest nierozwiązalne, gdy kierunek PQ przechodzi przez jeden z punków znanych A lub B albo jednocześnie przez oba te punkty, ponieważ wtedy odwrotność tg μ staje się wielkością nieoznaczoną