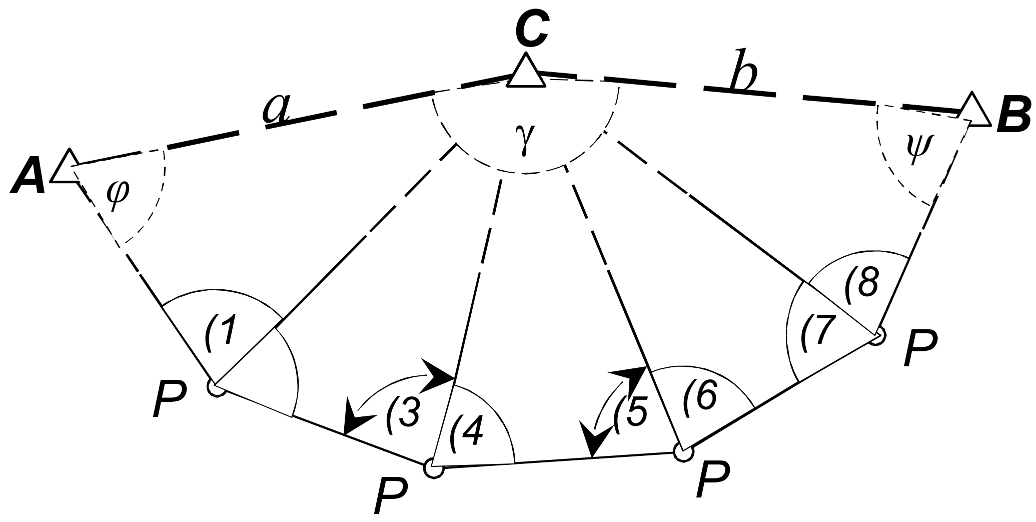
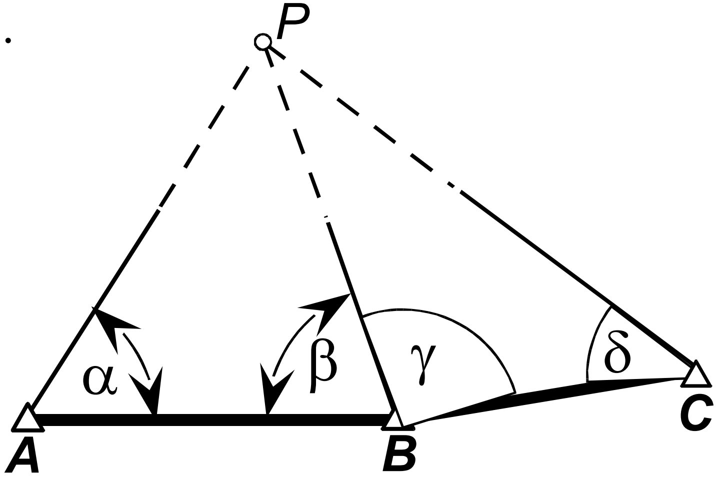
9.9. Wyznaczenie grup punktów, wcięcia wielokrotne

Konstrukcja pokazana na rys. 9.22 nie zawiera obserwacji nadliczbowych ($n = 8$; $u = 8$), a zatem w myśl przepisów instrukcji G-1 nie powinna być stosowana do zagęszczania osnowy poziomej. Możliwe jest jednak jej wykorzystanie do rachunku współrzędnych przybliżonych poprzedzającego wyrównanie spostrzeżeń pośredniczących. Rachunek zadania rozpoczynamy od wyznaczenia kąta γ ze współrzędnych punktów: A, B, C , a potem, podobnie jak w zadaniu Hansena, można wykonać obliczenie wartości kątów pomocniczych: φ, ψ. Po ich określeniu obliczamy azymuty boków: AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4C, a następnie współrzędne punktów wyznaczanych.

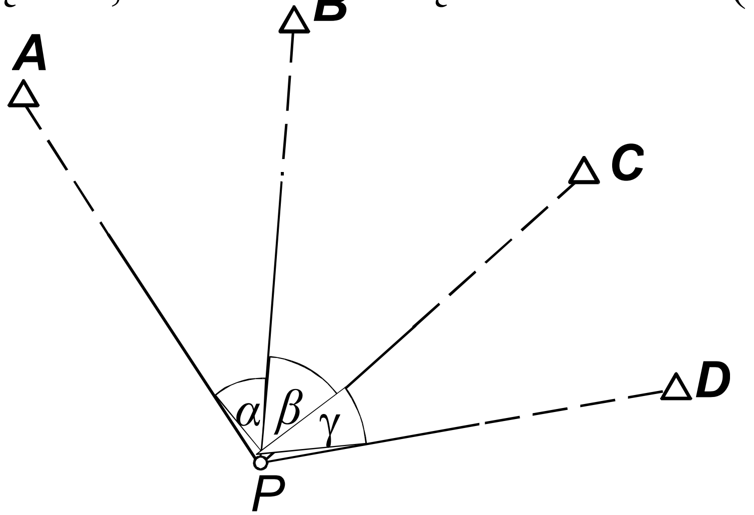


Rys. 9.22. Siatka do wyznaczenia grupy punktów

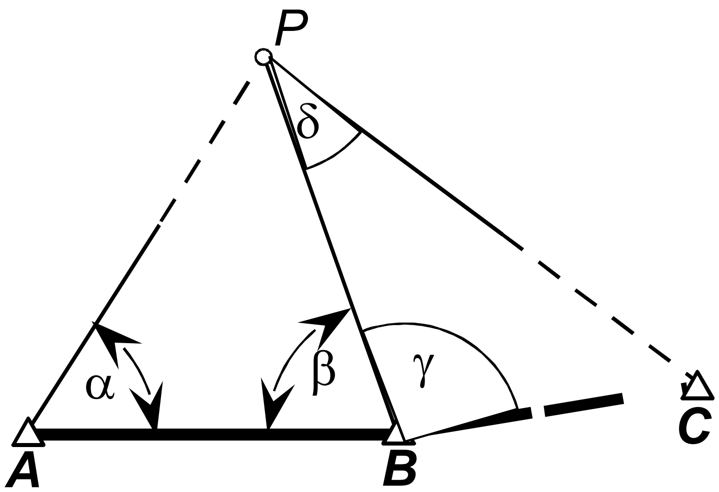
Powszechnie stosowane do zagęszczania sieci triangulacyjnych niezbędnego dla zapewnienia dogodnych nawiązań osnów poligonowych są wcięcia wielokrotne. *Wcięcia wielokrotne* są konstrukcjami geometrycznymi zawierającymi obserwacje nadliczbowe, założonymi przeważnie dla określenia współrzędnych pojedynczego punktu, rzadziej zaś dla dwóch punktów lub ich grupy. W przypadku jednego punktu można zastosować wielokrotne wcięcia kątowe, liniowe lub kątowo-liniowe (rys. 9.23 – 9.26).



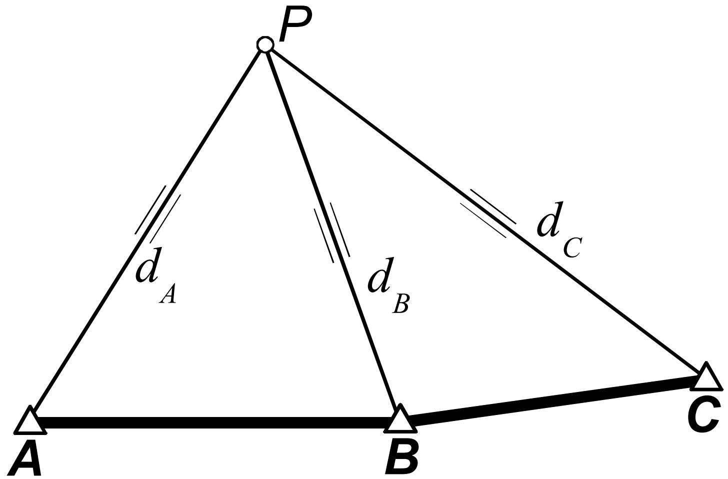
Rys. 9.23. Wielokrotne wcięcie w przód



Rys. 9.24. Wielokrotne wcięcie wstecz



Rys. 9.25. Wielokrotne wcięcie kombinowane

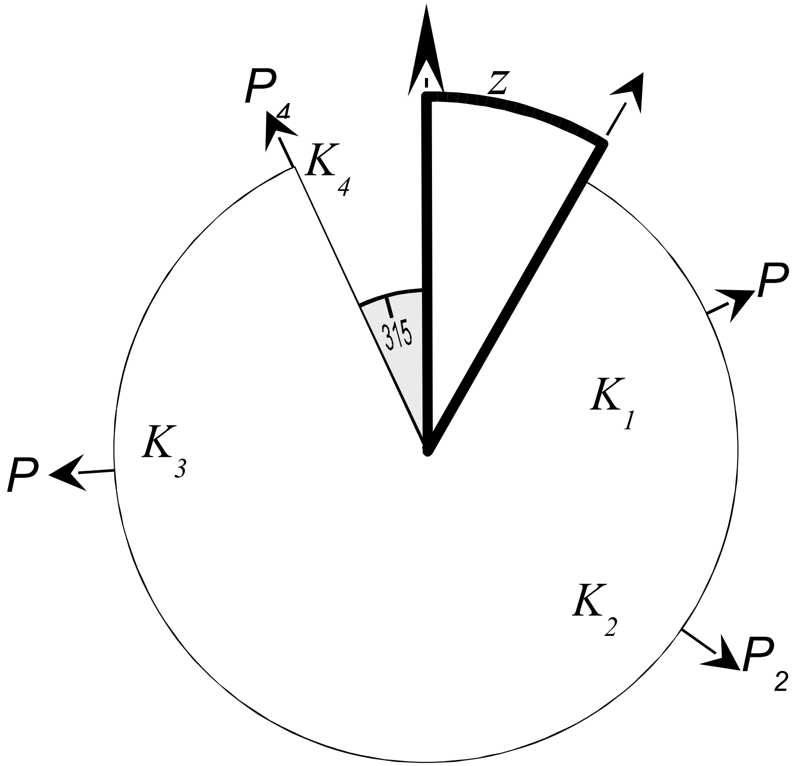


Rys. 9.26. Wielokrotne wcięcie liniowe

Obecność obserwacji nadliczbowych w konstrukcji wcięć wielokrotnych powoduje wystąpienie problemu wyrównania, które z reguły wykonywane jest metodą spostrzeżeń pośredniczących. Tok postępowania podczas tego wyrównania obejmuje następujące czynności:

1. Obliczenie przybliżonych współrzędnych x_0, y_0 punktu wcinanego na podstawie dowolnie wybranego wcięcia pojedynczego.
2. Obliczenie wartości pomierzonych elementów konstrukcyjnych wcięcia kątów $\alpha_{prz.}$ lub długości $d_{prz.}$ na podstawie współrzędnych przybliżonych.
3. Zestawienie równań błędów obserwacji kątowych na podstawie wzoru (2.7) lub równań błędów obserwacji liniowych w oparciu o wzór (2.10).
4. Przekształcenie układu równań błędów na układ równań normalnych, który w przypadku wcięcia pojedynczego punktu składa się z dwóch równań o dwu niewiadomych.
5. Rozwiązanie układu równań normalnych, obliczenie współrzędnych punktu wcinanego, poprawek spostrzeżeń i ich wyrównanych wartości.
6. Dokonanie oceny dokładności.

Wyrównanie wcięć, w których obserwacjami kątowymi są **kierunki** powinno uwzględnić obecność w równaniach obserwacyjnych dodatkowej niewiadomej z zwanej *niewiadomą orientacyjną* lub *stałą orientacyjną*. Ilość niewiadomych z, występujących w danym zadaniu wyrównawczym jest równa liczbie stanowisk, na których wykonano obserwacje kierunkowe. Niewiadoma z jest azymutem (kątem kierunkowym) zera limbusa



Rys. 9. 27. Niewiadoma orientacyjna

teodolitu ustawionego na danym stanowisku pomiarowym *S*, z którego dokonano pomiaru kierunków: K_1, K_2, K_3,…, K_n. Zgodnie z rys. 9.27 przybliżoną wartość z_i niewiadomej orientacyjnej można określić jako różnicę azymutu A_i^P dowolnej celowej obliczonego na podstawie współrzędnych danych i przybliżonych oraz pomierzonego kierunku K_i dla tej celowej.

$$z_i = A_i^P - K_i \tag{9.68}$$

W praktyce wartość przybliżoną z_0 niewiadomej orientacyjnej oblicza się najczęściej jako średnią arytmetyczną z wartości z_i dla wszystkich *n* kierunków danego stanowiska:

$$z_0 = \frac{[A^P - K]}{n} \tag{9.69}$$

Dla wartości prawdziwych: azymutu A_i *i*-tej celowej, odpowiadającego jej kierunku K_i wychodzącego ze stanowiska *S* do punktu celu P_i oraz niewiadomej orientacyjnej *z*, zapiszemy funkcję:

$$A_i = z + K_i = \operatorname{arc\,tg} \frac{Y_{P_i} - Y_S}{X_{P_i} - X_S} \tag{9.70}$$

Po rozwinięciu funkcji zapisanej wzorem (9.70) w szereg Taylora i wprowadzeniu przybliżonych wartości oraz poprawek obserwacji i niewiadomych, otrzymamy zamieszczony wcześniej w ust. 2.2 wzór (2.7 a) na równanie poprawki obserwacji kierunkowej v_K:

$$v_{K_i} = \left| \begin{array}{cc|cc} dx_S & dy_S & dx_{P_i} & dy_{P_i} \\ A & B & -A & -B \end{array} \right|_1 - dz + K_i^P - K_i$$

W równaniach błędów spostrzeżeń kierunkowych oprócz poprawek współrzędnych dx, dy punktów wyznaczanych wystąpi także poprawka dz niewiadomej orientacyjnej stanowiska S. Zgodnie z powyższym wzorem wyrazy wolne l_i równań poprawek obliczymy jako różnice: $K_i^P - K_i$. Biorąc po uwagę, że przybliżona wartość kierunku stanowi różnicę pomiędzy przybliżonym azymutem celowej i stałą orientacyjną:

$$K_i^P = A_i^P - z_0 ,$$

możemy zapisać równanie poprawki obserwacji kierunkowej jako:

$$v_{K_i} = \left| \begin{array}{cc|cc} dx_S & dy_S & dx_{P_i} & dy_{P_i} \\ A & B & -A & -B \end{array} \right|_1 - dz + \underbrace{A_i^P - z_0 - K_i}_{} \qquad (9.71)$$

W konstrukcji wcięcia wstecz jedynym punktem szukanym, dostarczającym dwu niewiadomych: dx, dy jest stanowisko S, natomiast punkty celu są punktami znanymi, toteż dla wyrównania wielokrotnego wcięcia wstecz równanie poprawki obserwacji kierunkowej przyjmie prostszą postać:

$$v_{K_i} = \left| \begin{array}{cc} dx & dy \\ A & B \end{array} \right|_1 - dz + l_i = B \cdot dx - A \cdot dy - dz + l_i \qquad (9.72)$$

Wyrazy A, B są współczynnikami kierunkowymi celowych wstecz, obliczonymi na podstawie wzorów (2.5). W ramach kontroli ułożenia równań błędów sprawdzamy czy znak współczynnika przy niewiadomej dx jest zgodny ze znakiem przyrostu Δy, zaś znak współczynnika przy dy powinien być przeciwny do znaku Δx.

Do równań błędów ułożonych według formuły (9.72) można zastosować typową procedurę wyrównania spostrzeżeń pośredniczących, wprowadzającą niewiadomą dz wraz z pozostałymi niewiadomymi do równań normalnych. Drugi sposób wyrównania polega na stosunkowo łatwym, dzięki zależności (9.73), wyeliminowaniu tej niewiadomej już na etapie równań błędów, ponieważ poprawki kierunków v_k tylko wtedy spełnią podstawowy warunek wyrównania $[v_K v_K]$ = minimum. gdy:

$$[v_K] = 0 \tag{9.73}$$

Po podsumowaniu stronami n równań błędów układu otrzymamy:

$$[v_K] = [B]dx - [A]dy - n \cdot dz + [l]$$

Związek (9.73) wynika z wcześniejszej zależności (7.51), w myśl której $[cv] = 0$. Ponieważ wszystkie współczynniki c przy niewiadomej dz w układzie równań błędów wynoszą -1, a więc $[-v_K] = 0$, czyli także $[v_K] = 0$. Poprawkę niewiadomej orientacyjnej określimy zatem na podstawie wzoru:

$$dz = \frac{[B]}{n} \cdot dx - \frac{[A]}{n} \cdot dy + \frac{[l]}{n} = 0 \tag{9.74}$$

Po odjęciu prawej strony równania (9.71) od każdego równania błędów układu (9.69), wyeliminujemy niewiadomą *dz* i otrzymamy układ, z którego równanie dla *i*-tego kierunku przyjmie postać:

$$v_{K_i} = \left(B_i - \frac{[B]}{n}\right)dx + \left(A_i - \frac{[A]}{n}\right)dy + \left(l_i - \frac{[l]}{n}\right) = B_i' \cdot dx - A_i' \cdot dy + L_i' \qquad (9.75)$$

gdzie:

$$A_i' = A_i - \frac{[A]}{n} \;\;;\;\; B_i' = B_i - \frac{[B]}{n} \;\;;\;\; L_i' = l_i - \frac{[l]}{n} \qquad (9.76)$$

Współczynnik A_i', B_i' nazywamy zredukowanymi współczynnikami równań poprawek, zaś element L_i' jest zredukowanym wyrazem wolnym. Znak „prim" nad symbolem współczynnika pozwala na odróżnienie tych współczynników od typowych współczynników kierunkowych. Kontrolą obliczenia elementów zredukowanych jest zerowanie się sum:

$$[A'] = 0 \;\;;\; [B'] = 0 \;\;;\; [L'] = 0 \qquad (9.77)$$

Po zestawieniu równań normalnych na podstawie elementów zredukowanych, przeprowadzamy ich rozwiązanie, które dostarcza poprawek niewiadomych *dx*, *dy*. W dalszym ciągu realizujemy typową procedurę wyrównania spostrzeżeń pośredniczących,